Вторые задачи

1. Все клетки доски 200×200 — белые. За одну операцию разрешается перекрасить в чёрный цвет любые три белых клетки, стоящие подряд по диагонали. Какое наибольшее количество клеток с помощью таких операций можно сделать чёрными?

2. Дано натуральное n. Рассмотрим все наборы целых неотрицательных чисел x_1, x_2, ..., x_n с суммой $n-1$. Найдите НОД всех произведений вида $C_n^{x_1} \cdot C_n^{x_2} \cdot \ldots \cdot C_n^{x_n}$.

3. Существуют ли ненулевые числа a, b, c такие, что при любом $n > 3$ можно найти многочлен вида $P_n(x) = x^n + \ldots + ax^2 + bx + c$, имеющий ровно n (не обязательно различных) целых корней?

4. Петя и Вася играют в игру на изначально белой доске 20×20. Петя начинает и каждым своим ходом закрашивает одну клетку доски в красный цвет, а Вася — в синий. Игроки ходят поочерёдно, перекрашивать ранее закрашенные клетки запрещено. В конце игры (когда все клетки доски закрашены) Петя находит красный клетчатый прямоугольник наибольшей площади, и Вася платит ему столько долларов, сколько в этом прямоугольнике клеток. Какой наибольший заработок может гарантировать себе Петя вне зависимости от игры Васи?

5. Дан клетчатый квадрат $n \times n$. Стороны клеток покрасили так, что у каждой клетки ровно две покрашенные стороны и ни одна покрашенная сторона не лежит на периметре данного квадрата $n \times n$. При каких n это возможно?

6. Пусть A_0, B_0, C_0 — середины сторон BC, AC, AB треугольника ABC, а A_1, B_1, C_1 — середины дуг BC, AC, AB описанной окружности того же треугольника. Построим на A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1 как на диаметрах окружности ω_a, ω_b, ω_c. Обозначим через ℓ_a длину общей внешней касательной к окружностям ω_b и ω_c. Аналогично определим ℓ_b и ℓ_c. Докажите, что $\ell_a = \ell_b = \ell_c$.

7. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках D и P. Точки A и B лежат на окружностях ω_1 и ω_2 соответственно, причем AB — общая касательная к этим окружностям, а D лежит внутри ABP. AD вторично пересекает окружность ω_2 в точке C, M — середина BC. Докажите, что $\angle DPM = \angle BDC$.

8. Дан четырёхугольник $ABCD$ такой, что $AB = BC$, $AD = DC$ и $\angle BAD = \angle BCD = 90°$. На отрезках AD и CD выбраны такие точки X и Y, что $BX \perp AY$. Докажите, что $CX \perp BY$.