Теория

Неравенства о средних

Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ — положительные числа, тогда

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_n}} \leqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \leqslant \frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2}{n}}.$$

Транснеравенство

Даны два набора чисел $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \dots \leqslant x_n$ и $y_1 \leqslant y_2 \leqslant \dots \leqslant y_n$, и перестановка σ чисел $\{1, 2, \dots, n\}$. Тогда выполняется неравенство

$$x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \dots + x_n y_1 \leqslant x_1 y_{\sigma(1)} + x_2 y_{\sigma(2)} + \dots + x_n y_{\sigma(n)} \leqslant x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

КБШ

Для любых вещественных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ и $b_1, b_2, \dots, b_n$ выполняется неравенство

$$(a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\dots+b_n^2) \geqslant (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2$$

причём равенство достигается тогда и только тогда, когда наборы чисел a_i и b_i пропорциональны (или один из наборов нулевой).

Важное следствие из КБШ

Для положительных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ и $b_1, b_2, \dots, b_n$ верно неравенство

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\dots+\frac{a_n^2}{b_n} \geqslant \frac{(a_1+a_2+\dots+a_n)^2}{b_1+b_2+\dots+b_n}.$$

Задачи

1. **Неравенство Чебышёва.** Докажите, что для неотрицательных чисел

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \dots \geqslant a_n, b_1 \geqslant b_2 \geqslant \dots \geqslant b_n$$

справедливо неравенство

$$(a_1+a_2+\dots+a_n)(b_1+b_2+\dots+b_n) \leqslant n(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n).$$

2. Докажите, что для положительных чисел a, b, c выполнено неравенство

$$a+b+c \geqslant \frac{a(b+1)}{a+1}+\frac{b(c+1)}{b+1}+\frac{c(a+1)}{c+1}.$$

3. Докажите, что для положительных чисел a, b, c, d выполнено неравенство

$$\frac{a+b+c+d}{abcd} \leqslant \frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3}.$$

4. Числа a, b и c удовлетворяют условию $a+b+c \neq 0$. Докажите, что:

$$\frac{1}{a^2+b^2+4c^2}+\frac{1}{a^2+4b^2+c^2}+\frac{1}{4a^2+b^2+c^2} \leqslant \frac{9}{2(a+b+c)^2}.$$

5. Докажите, что для любых положительных чисел $a_1, \dots, a_n$ справедливо неравенство

$$\left(1+\frac{a_1^2}{a_2}\right)\left(1+\frac{a_2^2}{a_3}\right)\cdot \dots \cdot\left(1+\frac{a_n^2}{a_1}\right) \geqslant (1+a_1)(1+a_2)\cdot \dots \cdot (1+a_n).$$

6. Положительные числа a и b удовлетворяют условию $ab \geqslant 1$. Докажите, что

$$\left(a+2b+\frac{2}{a+1}\right)\left(b+2a+\frac{2}{b+1}\right) \geqslant 16.$$

7. Для положительных чисел a, b, c таких, что $abc=1$, докажите неравенство

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}.$$

8. Докажите, что если $1 \leqslant x_1, x_2, \dots, x_n \leqslant 2$, то

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\right)^2 \leqslant n^3.$$