СЛУ: задачи.

1. **Много векторов линейно зависимы.** Если есть $n + 1$ строка длины n, то они *линейно зависимы*, то есть существует нетривиальна линейная комбинация, равная нулевой строке.

2. **Ортогональность.** Может ли в $\mathbb{R}^3$ быть 4 попарно ортогональных ненудлевых вектора?

3. **Мальчики и девочки.** В классе 11 девочек и 10 мальчиков, некоторые девочки нравятся некотороым мальчикам. Докажите, что существует непустой набор девочек, что каждому мальчику нравится четное число из этих девочек.

4. **10 бананов.** Есть 10 бананов одинакового веса и двухчашечные весы без гирь. На обе чаши можно класть только поровну бананов. Докажите, что менее чем за 9 взвешиваний нельзя доказать, что все бананы действительно весят одинаково. Веса бананов: **(а)** вещественные; **(б)** положительные; **(в)** натуральные.

5. **Дискретное уравнение теплопроводности.** **(а)** В каждой клетке каемки прямоугольной таблицы записано число. Докажите, что можно расставить, причем единственным образом, числа во внутренние клетки таблицы так, чтобы каждое число во внутренней клетке равнялось среднему арифметическому своих соседей (у клетки максимум 4 соседа).

   (б) Каков физический смысл задачи, как она «решается» по физическим соображениям?
   (в) Обобщите задачу на непрямоугольные таблицы с «дырами» внутри и пространственные таблицы.
   (г) Как формулируется и решается задача для произвольного связного графа?
   (д) Решите задачу, если в графе расставлены комплексные числа.

6. **101 корова.** Есть 101 корова. Если убрать любую буренку, то оставшихся можно разделить на два равных по весу и численности стада. Докажите, что все коровы весят одинаково, если их веса **(а)** *целые;
   (б) рациональные;
   (в) действительные;
   (г) комплексные.

7. **10 яблок.** У Пети было 10 яблок, вес каждого – вещественное положительное число. Он проделал с ними несколько взвешиваний на чашечных весах без гирь, и каждый раз получал равенство. Докажите, что Петя сможет приписать каждому яблоку цену в *натуральное* число копеек так, чтобы при каждом из проведенных взвешиваний цены чаш были одинаковы.

8. **Зарубки на отрезке.** На отрезке $[0, 1]$ отмечены концы, а также конечное число *различных* точек внутри. Известно, что любая внутренняя отмеченная точка лежит ровно посередине между какими-нибудь отмеченными точками. Докажите, что все отмеченные точки рациональны.