Геометрия масс

Центром масс системы материальных точек $m_1A_1, m_2A_2, ..., m_nA_n$ с суммой масс, не равной 0, называется точка M, для которой имеет место равенство:

$$m_1\overrightarrow{MA_1} + m_2\overrightarrow{MA_2} + ... + m_n\overrightarrow{MA_n} = \vec{0}.$$

- Для любой системы точек центр масс существует и единственный;
- Центр масс двух точек, это точка отрезка A_1A_2, которая делит его в отношении $A_1M : MA_2 = m_2 : m_1$;
- (Правило группровки) Пусть M_1 — центр масс системы точек $A_1, A_2, ..., A_m$, а M_2 — центр масс системы точек $A_{m+1}, A_{m+2}, ..., A_{m+n}$. Тогда центр масс M всей системы точек лежит на отрезке M_1M_2 и делит его в отношении $m : n$ считая от M_1. Сформулируйте аналогичное утверждения для разбиения множества изначальных точек на k непересекающихся множеств и с произвольными массами точек.

1. В треугольнике ABC длины сторон $AB = C$, $BC = A$, $CA = B$. Доказать, что если в точки A, B и C поставлены массы A, B и C соответственно, то центром масс полученной системы является центр окружности, вписанной в треугольник . Найти, в каком отношении центр вписанной окружности делит каждую биссектрису.
2. На сторонах AB, BC, CD и AD выпуклого четырехугольника $ABCD$ взяты точки K, L, M и N соответственно, причем $AK : KB = DM : MC = p$, $BL : LC = AN : ND = q$. Пусть точка P — точка пересечения отрезков KM и LN. Найдите, в каком отношении точка P делит каждый из отрезков KM и LN.
3. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты точки K, L и M соответственно так, что $AK : KB = 2 : 1$, $BL : LC = CM : AM = 1 : 2$. ML и CK пересекаются в точке P. Найдите, в каком соотношении точка P делит отрезки CK и ML.
4. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ взяты точки K и L так, что $\frac{BK}{KC} = \frac{CL}{LD}$. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника AKL лежит на диагонали BD.
5. Через точку P, расположенную внутри параллелограмма $ABCD$, проведены прямые, параллельные сторонам параллелограмма. Они пересекают стороны AB, BC, CD и DA в точках K, L, M и N соответственно. Пусть Q — точка пересечения средних линий четырехугольника $KLMN$, а S — центр параллелограмма. Докажите, что точка Q лежит на отрезке PS и определите, в каком отношении она делит этот отрезок.
6. Пусть M — центр тяжести треугольника ABC, I — центр его вписанной окружности, S — центр окружности, вписанный в треугольник, образованный средними линиями треугольника ABC, и N — точка Нагеля треугольника ABC. Докажите, что точки N, M, I и S лежат на одной прямой, причем $MN = 2IM$ и $IS = SN$.

7. Центрально симметричная фигура на клетчатой бумаге состоит из n “уголков” четырех клеток и k прямоугольников размером 1×4. Докажите, что n чётно.

8. В квадрате 10×10 расставлены числа от 1 до 100 следующим образом: в первой строке (слева направо по порядку) 1, 2, ..., 10, во второй — 11, 12, ..., 20, ..., в десятой — 91, 92, ..., 100. Разрешается взять любой прямоугольник 1×3 и сделать следующую операцию: прибавить к крайним числам по 1, а из среднего отнять 2, или сделать обратную операцию. Через некоторое время оказалось, что в квадрате опять присутствуют все числа от 1 до 100. Докажите, что они расположены на первоначальных местах.