

## Тригонометрия

1. На листе бумаги нарисован график функции  $y = \sin x$ . Лист свернут в цилиндрическую трубочку так, что все точки, абсциссы которых отличаются на  $2\pi$ , совмещены. Докажите, что все точки графика синусоиды при этом лежат в одной плоскости.
2. Докажите, что для каждого  $x$  такого, что  $\sin x \neq 0$ , найдется такое натуральное  $n$ , что  $|\sin nx| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ .
3. Какое наибольшее количество множителей вида  $\sin \frac{n\pi}{x}$  можно вычеркнуть в левой части уравнения

$$\sin \frac{\pi}{x} \sin \frac{2\pi}{x} \sin \frac{3\pi}{x} \dots \sin \frac{2018\pi}{x} = 0$$

так, чтобы число его натуральных корней не изменилось?

4. На плоскости даны оси координат с одинаковым, но не обозначенным масштабом и график функции  $y = \sin x$ ,  $x \in (0; \alpha)$ . Как с помощью циркуля и линейки построить касательную к этому графику в заданной его точке, если: **(а)**  $\alpha \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$ ; **(б)**  $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$ ?
5. Существует ли такое положительное число  $\alpha$ , что при всех действительных  $x$  верно неравенство  $|\cos x| + |\cos \alpha x| > \sin x + \sin \alpha x$ ?
6. Число  $x$  таково, что обе суммы  $S = \sin 64x + \sin 65x$  и  $C = \cos 64x + \cos 65x$  — рациональные числа. Докажите, что в одной из этих сумм оба слагаемых рациональны.
7. Даны различные натуральные числа  $a, b$ . На координатной плоскости нарисованы графики функций  $y = \sin ax$ ,  $y = \sin bx$  и отмечены все точки их пересечения. Докажите, что существует натуральное число  $c$ , отличное от  $a, b$  и такое, что график функции  $y = \sin cx$  проходит через все отмеченные точки.