

Решение рекуррент

Определение. Последовательность чисел $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$, которая удовлетворяет с заданными t_1, t_2, \dots, t_k соотношению

$$a_{n+k} = t_1 a_{n+k-1} + t_2 a_{n+k-2} + \dots + t_k a_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

называется *линейной рекуррентной (возвратной) последовательностью k -ого порядка*.

Уравнение

$$x^k - t_1 x^{k-1} - t_2 x^{k-2} - \dots - t_k = 0$$

называется *характеристическим уравнением* последовательности $\{a_n\}$.

Про разные действительные корни

1. (а) Докажите, что множество последовательностей удовлетворяющих рекуррентному соотношению

$$a_{n+k} = t_1 a_{n+k-1} + t_2 a_{n+k-2} + \dots + t_k a_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

образует линейное пространство с естественными операциями.

(б) Докажите, что геометрическая прогрессия $\{a_n\} = x_0^n$ удовлетворяет соотношению

$$a_{n+k} = t_1 a_{n+k-1} + t_2 a_{n+k-2} + \dots + t_k a_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

тогда и только тогда, когда x_0 — корень характеристического уравнения.

(в) Пусть характеристическое уравнение последовательности $\{a_n\}$ имеет k различных корней — x_1, x_2, \dots, x_k . Докажите, что при фиксированных a_0, a_1, \dots, a_{k-1} существует ровно один набор чисел c_1, c_2, \dots, c_k такая, что

$$a_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n + \dots + c_k x_k^n \quad (n \geq 0).$$

2. Найдите формулу n -го члена для последовательностей, заданных условиями ($n \geq 0$):

(а) $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$;

(б) $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 5, a_{n+3} = 2a_{n+1} + a_{n+1} - 2a_n$;

(в) (числа Фибоначчи) $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

3. Пусть $(1 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n \sqrt{2}, (n \geq 0)$.

(а) Выразите через a_n и b_n число $(1 - \sqrt{2})^n$.

(б) Докажите равенство $a_n^2 - 2b_n^2 = (-1)^n$.

(в) Найдите формулы n -го члена для последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$.

Что-то не так с корнями

4. Найдите формулу n -го члена для последовательностей, заданных условиями ($n \geq 0$):
- (а) $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n$;
- (б) $a_0 = 1, a_1 = 2, a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$.
5. Что делать с рекуррентной последовательностью второго порядка, если у характеристического уравнения нет корней?
6. Пусть характеристическое уравнение последовательности $\{a_n\}$ имеет корень x_0 кратности 2. Докажите, что при фиксированных a_0, a_1 существует ровно одна пара чисел c_1, c_2 такая, что

$$a_n = (c_1 + c_2 n)x_0^n \quad (n \geq 0).$$

Просто задачи

7. Лягушка прыгает по вершинам треугольника ABC , перемещаясь каждый раз в одну из соседних вершин. Сколькими способами она может попасть из A в A за n прыжков?
8. В нулевой момент времени в вершине A шестиугольника $ABCDEF$ сидит лягушка. Каждую секунду лягушка перепрыгивает в одну из соседних вершин, выбирая направление случайным образом равновероятно.
- (а) Сколькими способами она может попасть из A в C за n прыжков?
- (б) Тот же вопрос, но при условии, что ей нельзя прыгать в D (там находится мина)?