

Метод касательных

1. Положительные числа a, b, c, d в сумме дают 4. Докажите неравенство

$$\frac{a}{a^3 + 8} + \frac{b}{b^3 + 8} + \frac{c}{c^3 + 8} + \frac{d}{d^3 + 8} \leq \frac{4}{9}.$$

2. Положительные числа a, b, c удовлетворяют соотношению $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Докажите неравенство

$$\frac{1}{2-a} + \frac{1}{2-b} + \frac{1}{2-c} \geq 3.$$

3. Для любых положительных чисел a, b, c докажите, что

$$\frac{(b+c-a)^2}{a^2+(b+c)^2} + \frac{(c+a-b)^2}{b^2+(c+a)^2} + \frac{(a+b-c)^2}{c^2+(a+b)^2} \geq \frac{3}{5}.$$

4. Даны положительные числа a, b, c, d , удовлетворяющие соотношению

$$\frac{1}{a^3+1} + \frac{1}{b^3+1} + \frac{1}{c^3+1} + \frac{1}{d^3+1} = 2.$$

Докажите неравенство

$$\frac{1-a}{1-a+a^2} + \frac{1-b}{1-b+b^2} + \frac{1-c}{1-c+c^2} + \frac{1-d}{1-d+d^2} \geq 0.$$

5. Пусть даны положительные числа a, b, c такие, что $abc = 1$. Докажите неравенство

$$\frac{a}{a^2+2} + \frac{b}{b^2+2} + \frac{c}{c^2+2} \leq 1.$$

6. Даны положительные числа a_2, a_3, \dots, a_n удовлетворяющие соотношению $a_2 a_3 \dots a_n = 1$. Докажите неравенство

$$(a_2 + 1)^2 \cdot (a_3 + 1)^3 \cdot \dots \cdot (a_n + 1)^n > n^n.$$