Свойства биномиальных коэффициентов

1. Пусть p — простое число, $n = n'p + n_0$, $k = k'p + k_0$, где $n_0 < p$, $k_0 < p$. Докажите, что
$$C_n^k = C_{n'}^{k'} C_{n_0}^{k_0} \mod p.$$

2. **Теорема Люка.**

Пусть разложения чисел n и k в p-ричной системе счисления выглядят следующим образом
$$n = n_d p^d + n_{d-1} p^{d-1} + \ldots + n_1 p + n_0;$$
$$k = k_d p^d + k_{d-1} p^{d-1} + \ldots + k_1 p + k_0.$$

Тогда
$$C_n^k = C_{n_d}^{k_d} C_{n_{d-1}}^{k_{d-1}} \cdot \ldots \cdot C_{n_1}^{k_1} C_{n_0}^{k_0} \mod p.$$

3. Докажите, что C_n^k не делится на p тогда и только тогда, когда $k_i \leqslant n_i$ для всех $i = 0, 1, \ldots, d$.

4. Докажите, что число нечетных биномиальных коэффициентов в n-й строке треугольника Паскаля равно числу таких k, в двоичной записи которых единицы стоят лишь там, где они стоят в двоичной записи числа n. Число таких k равно 2^r, где r — число единиц в двоичной записи числа n.

5. Рассмотрим n-ю строку треугольника Паскаля по модулю 2 как двоичную запись некоторого натурального числа P_n. Докажите, что
$$P_n = F_{i_1} \cdot \ldots \cdot F_{i_s},$$
где где i_1, ..., i_s — номера разрядов, в которых в двоичной записи числа n стоят единицы, а $F_i = 2^{2^i} + 1$ — i-е число Ферма.

6. Докажите, что если биномиальный коэффициент C_n^k нечётен, то
$$C_n^k = \prod_{i=1}^{d} (-1)^{k_{i-1} n_i + k_i n_{i-1}} \mod 4.$$

7. Докажите, что если в двоичной записи числа n нет двух единиц подряд, то все нечетные числа в n-й строке треугольника Паскаля сравнимы с 1 по модулю 4, а в противном случае ровно половина из них сравнима с 1 по модулю 4.

8. Докажите, что если биномиальный коэффициент C_n^k четен, то он не делится на 4 тогда и только тогда, когда имеется ровно одно значение i, для которого $k_i > n_i$, и при этом $k_{i+1} < n_{i+1}$.