

Геомразнобой к региону

1. Биссектриса угла между диагоналями вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекает стороны AB и CD в точках X и Y соответственно. Известно, что середина стороны AD равноудалена от точек X и Y . Докажите, что середина стороны BC также равноудалена от точек X и Y .
2. Вписанная в треугольник ABC окружность ω касается сторон BC , CA , AB в точках A_1 , B_1 и C_1 соответственно. На продолжении отрезка AA_1 за точку A взята точка D такая что $AD = AC_1$. Прямые DB_1 и DC_1 пересекают второй раз окружность ω в точках B_2 и C_2 . Докажите, что B_2C_2 — диаметр окружности ω .
3. Дан параллелограмм $ABCD$. Через ортоцентр треугольника ABC провели прямые параллельные сторонам параллелограмма и пересекли эти прямые со сторонами параллелограмма в точках K , L , M , N . Докажите, что точки K , L , M , N лежат на одной окружности.
4. На основании AC равнобедренного треугольника ABC взяли произвольную точку X , а на боковых сторонах — точки P и Q так, что $XPBQ$ — параллелограмм. Докажите, что точка Y , симметричная точке X относительно PQ , лежит на описанной окружности треугольника ABC .
5. В равнобедренном треугольнике ABC на основании BC взята точка D , а на боковой стороне AB — точки E и M так, что $AM = ME$ и отрезок DM параллелен стороне AC . Докажите, что $AD + DE > AB + BE$.
6. Биссектрисы AA_1 и CC_1 прямоугольного треугольника ABC ($\angle B = 90^\circ$) пересекаются в точке I . Прямая, проходящая через точку C_1 и перпендикулярная прямой AA_1 , пересекает прямую, проходящую через A_1 и перпендикулярную CC_1 , в точке K . Докажите, что середина отрезка KI лежит на отрезке AC .
7. Дан параллелограмм $ABCD$, в котором угол ABC тупой. Прямая AD пересекает второй раз окружность ω , описанную вокруг треугольника ABC , в точке E . Прямая CD пересекает второй раз окружность ω в точке F . Докажите, что центр описанной окружности треугольника DEF лежит на окружности ω .
8. Пусть A_1 и B_1 — основания высот треугольника ABC . Оказалось, что центр вписанной окружности лежит на прямой A_1B_1 . Покажите, что L — середина меньшей дуги AB описанной окружности треугольника ABC является центром вневписанной окружности треугольника CA_1B_1 .
9. Вписанная окружность треугольника ABC касается его стороны AC в точке K . Обозначим центры вписанных окружностей треугольников ABK и CBK через I и J . Докажите, что центр описанной окружности треугольника VIJ лежит на биссектрисе угла ABC .
10. Перпендикуляр из центра описанной окружности равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) на его биссектрису AL пересекает прямую AB в точке K . Через K проводят прямую параллельную AL до пересечения с BC в точке M . Докажите, что $BK = ML$.