

Геомразной к региону

1. Дан параллелограмм $ABCD$. Через ортоцентр треугольника ABC провели прямые параллельные сторонам параллелограмма и пересекли эти прямые со сторонами параллелограмма в точках K, L, M, N . Докажите, что точки K, L, M, N лежат на одной окружности.

2. На основании AC равнобедренного треугольника ABC взяли произвольную точку X , а на боковых сторонах — точки P и Q так, что $XPBQ$ — параллелограмм. Докажите, что точка Y , симметричная точке X относительно PQ , лежит на описанной окружности треугольника ABC .

3. В равнобедренном треугольнике ABC на основании BC взята точка D , а на боковой стороне AB — точки E и M так, что $AM = ME$ и отрезок DM параллелен стороне AC . Докажите, что $AD + DE > AB + BE$.

4. Дан параллелограмм $ABCD$, в котором угол ABC тупой. Прямая AD пересекает второй раз окружность ω , описанную вокруг треугольника ABC , в точке E . Прямая CD пересекает второй раз окружность ω в точке F . Докажите, что центр описанной окружности треугольника DEF лежит на окружности ω .

5. Биссектрисы AA_1 и CC_1 прямоугольного треугольника ABC ($\angle B = 90^\circ$) пересекаются в точке I . Прямая, проходящая через точку C_1 и перпендикулярная прямой AA_1 , пересекает прямую, проходящую через A_1 и перпендикулярную CC_1 , в точке K . Докажите, что середина отрезка KI лежит на отрезке AC .

6. Пусть A_1 и B_1 — основания высот треугольника ABC . Оказалось, что центр вписанной окружности лежит на прямой A_1B_1 . Покажите, что L — середина меньшей дуги AB описанной окружности треугольника ABC является центром вневписанной окружности треугольника CA_1B_1 .

7. Вписанная окружность треугольника ABC касается его стороны AC в точке K . Обозначим центры вписанных окружностей треугольников ABK и CBK через I и J . Докажите, что центр описанной окружности треугольника AIJ лежит на биссектрисе угла ABC .

8. Перпендикуляр из центра описанной окружности равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) на его биссектрису AL пересекает прямую AB в точке K . Через K проводят прямую параллельную AL до пересечения с BC в точке M . Докажите, что $BK = ML$.

9. В треугольнике ABC высота AH и медиана CM пересекаются в точке P . Перпендикуляр из точки B к стороне AC пересекает перпендикуляр из точки H к медиане CM в точке Q . Докажите, что прямые CQ и BP перпендикулярны.

10. Пусть I — центр вписанной окружности неравнобедренного треугольника ABC . Через A_1 обозначим середину дуги BC описанной окружности треугольника ABC , не содержащей точки A , а через A_2 — середину дуги BAC . Перпендикуляр, опущенный из точки A_1 на прямую A_2I , пересекает прямую BC в точке A' . Аналогично определяются точки B' и C' . а) Докажите, что точки A', B' и C' лежат на одной прямой. б) Докажите, что эта прямая перпендикулярна прямой OI , где O — центр описанной окружности треугольника ABC .