

Клеточная комбинаторика

1. В каждую клетку таблицы 1001×1001 поставили 0 или 1. Оказалось, что в любом столбце нулей больше, чем единиц. Обязательно ли найдутся два столбца таких, что число строк, в пересечениях которых с этими двумя столбцами стоят только нули, больше числа строк, в пересечениях которых с этими двумя столбцами стоят только единицы?
2. Вася задумал 8 клеток шахматной доски, никакие две из которых не лежат в одной строке или в одном столбце. За ход Петя выставляет на доску 8 ладей, не бьющих друг друга, а затем Вася указывает все лады, стоящие на задуманных клетках. Если количество ладей, указанных Васей на этом ходе, чётно (т. е. 0, 2, 4, 6 или 8), то Петя выигрывает; иначе все фигуры снимаются с доски и Петя делает следующий ход. За какое наименьшее число ходов Петя сможет гарантированно выиграть?
3. Назовём расстояние между двумя клетками клетчатой доски наименьшее число ходов, которое нужно сделать шахматному королю, чтобы добраться из одной клетки в другую. Какое наибольшее число клеток доски 100×100 можно отметить так, чтобы среди отмеченных клеток не нашлось двух на расстоянии 15?
4. В белой таблице 2021×2021 некоторые клетки окрасили чёрным. Назовём натуральное число k удачным, если $k \leq 2021$, и в каждом из клетчатых квадратов со стороной k , расположенных в таблице, окрашено ровно k клеток. (Например, если все клетки чёрные, то удачным является только число 1.) Какое наибольшее количество чисел могут быть удачными?
5. В таблице $N \times N$ расставлены все натуральные числа от 1 до N^2 . Число назовём большим, если оно наибольшее в своей строке, и малым, если оно наименьшее в своём столбце (таким образом, число может быть и большим, и малым одновременно, а может не быть ни тем, ни другим). Найдите наименьшую возможную разность между суммой всех больших чисел и суммой всех малых чисел.
6. Назовём лодочкой трапецию с основаниями 1 и 3, получающуюся приклеиванием к противоположным сторонам единичного квадрата двух треугольничков (полуклеток). В квадрате 100×100 расположена невидимая лодочка (её можно поворачивать, она не выходит за границы квадрата, её средняя клетка целиком лежит на одной из клеток квадрата). Одним выстрелом можно накрыть любую треугольную половинку клетки. Если выстрел пересекается с внутренностью лодочки (т. е. пересечение треугольника выстрела с лодочкой имеет ненулевую площадь), то она считается потопленной. Какого наименьшего количества выстрелов достаточно, чтобы наверняка потопить лодочку?
7. Дана клетчатая таблица 100×100 , клетки которой покрашены в чёрный и белый цвета. При этом во всех столбцах поровну чёрных клеток, в то время как во всех строках разные количества чёрных клеток. Каково максимальное возможное количество пар соседних по стороне разноцветных клеток?
8. Дано натуральное число $n > 2$. Рассмотрим все покраски клеток доски $n \times n$ в k цветов такие, что каждая клетка покрашена ровно в один цвет, и все k цветов встречаются. При каком наименьшем k в любой такой покраске найдутся четыре окрашенных в четыре разных цвета клетки, расположенные в пересечении двух строк и двух столбцов?