

Конструктивы?

1. При каких n единицу можно представить в виде суммы n различных дробей с числителем 1 и натуральным знаменателем?
2. Существуют ли целые числа a, b, c, d , по модулю большие миллиона, для которых

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{1}{abcd}?$$

3. Существуют ли натуральные числа a, b, c такие, что все три числа

$$a^2 + b + c, a + b^2 + c, a + b + c^2$$

являются точными квадратами?

4. Существует ли натуральное число N такое, что если приписать его к самому себе справа, то полученное число окажется точным квадратом?
5. Существует ли арифметическая прогрессия, состоящая из 1000 членов, которые являются несократимыми рациональными дробями, все числители и знаменатели которых попарно различны?
6. Существуют ли 100 рациональных чисел таких, что произведение любых двух не является целым числом, а произведение любых трёх является целым?
7. (а) Существуют ли натуральные a, b и c такие, что $a^9 + b^{10} = c^{11}$?
(б) Существуют ли натуральные a, b и c (причём a — нечётное) такие, что $a^{10} + b^{10} = c^{11}$?
8. Верно ли, что любое натуральное число является разностью двух натуральных чисел, у которых поровну простых делителей? (Каждый простой делитель учитывается 1 раз: например, у числа 120 ровно три простых делителя.)
9. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n , для которых
(а) $n!$ делится на $n^2 + 1$;
(б) $n!$ не делится на $n^2 + 1$.
10. Существуют ли 1000 различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых делится на квадрат их разности?