

## Разной по теории чисел

1. В произведении трёх натуральных чисел каждый сомножитель уменьшили на 3. Могло ли произведение при этом увеличиться ровно на 2016?
2. Целые числа  $a, x_1, x_2, \dots, x_{13}$  таковы, что

$$a = (1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_{13}) = (1 - x_1)(1 - x_2) \dots (1 - x_{13}).$$

Докажите, что  $ax_1x_2 \dots x_{13} = 0$ .

3. Даны различные натуральные числа  $a_1, a_2, \dots, a_{14}$ . На доску выписаны все 196 чисел вида  $a_k + a_l$ , где  $1 \leq k, l \leq 14$ . Может ли оказаться, что для любой комбинации из двух цифр среди написанных на доске чисел найдется хотя бы одно число, оканчивающееся на эту комбинацию (то есть, найдутся числа, оканчивающиеся на 00, 01, 02, ..., 99)?
4. Изначально на доске записаны числа  $m$  и  $n$ . Каждую минуту Саша записывает в тетрадку квадрат наименьшего из чисел на доске, после чего Даша ищет разность чисел на доске и записывает ее вместо наибольшего из них, пока в какой-то момент не выпишет 0. Чему равна сумма чисел у Саши в тетради?
5. У Игоря есть 55 карточек: на одной написана цифра 1, на двух — цифра 2, ..., на девяти — цифра 9, на десяти — цифра 0. Можно ли из карточек выложить два числа: одно — 25-значное, другое — 30-значное, чтобы десятичная запись их произведения состояла из одних единиц?
6. Назовем расстановку  $n$  единиц и  $m$  нулей по кругу хорошей, если в ней можно поменять местами соседние нуль и единицу так, что получится расстановка, отличающаяся от исходной поворотом. При каких натуральных  $n, m$  существует хорошая расстановка?
7. На доске написали 100 попарно различных натуральных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ . Затем под каждым числом  $a_i$  написали число  $b_i$ , полученное прибавлением к  $a_i$  наибольшего общего делителя остальных 99 исходных чисел. Какое наименьшее количество попарно различных чисел может быть среди  $b_1, b_2, \dots, b_{100}$ ?