

Разной по теории чисел

1. Изначально на доске записаны числа m и n . Каждую минуту Саша записывает в тетрадку квадрат наименьшего из чисел на доске, после чего Даша ищет разность чисел на доске и записывает её вместо наибольшего из них, пока в какой-то момент не выпишет 0. Чему равна сумма чисел у Саши в тетради?
2. Назовём расстановку n единиц и m нулей по кругу хорошей, если в ней можно поменять местами соседние единицу и ноль так, что получится расстановка, отличающаяся от исходной поворотом. При каких натуральных n , m существует хорошая расстановка?
3. Для каждого простого p найдите наибольшую натуральную степень числа $p!$, на которую делится число $(p^2)!$.
4. На доске написали 100 попарно различных натуральных чисел a_1, a_2, \dots, a_{100} . Затем под каждым числом a_i написали число b_i , полученное прибавлением к a_i наибольшего общего делителя остальных 99 исходных чисел. Какое наименьшее количество попарно различных чисел может быть среди b_1, b_2, \dots, b_{100} ?
5. Найдите все наборы натуральных чисел a_1, a_2, \dots, a_{20} таких, что

$$a_{i+2}^2 = \text{НОК}(a_{i+1}, a_i) + \text{НОК}(a_i, a_{i-1}),$$

где $a_i = a_{i+20}$ для любого i .

6. На доске написаны 2020 последовательных целых числа. За ход можно разбить написанные числа на пары произвольным образом и каждую пару чисел заменить на их сумму и разность (не обязательно вычитать из большего меньшее; все замены происходят одновременно). Докажите, что на доске больше никогда не появятся 2020 последовательных целых числа.