

## Дистанционная олимпиада — 7

1. На доске написано целое положительное число. Раз в минуту Максим прибавляет к числу на доске какой-то его положительный делитель, записывает на доску результат и стирает прошлое число. При этом ему запрещено дважды подряд прибавлять одно и то же число. Докажите, что он может действовать так, чтобы на доске когда-нибудь оказался точный квадрат.
2. Даны шесть действительных чисел  $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6$ . Для каждой тройки различных чисел из этих шести Витя вычислил их сумму. Оказалось, что все 20 полученных сумм попарно различны; обозначим их через

$$s_1 < s_2 < s_3 < \dots < s_{19} < s_{20}.$$

При этом  $x_2 + x_3 + x_4 = s_{11}$ ,  $x_2 + x_3 + x_6 = s_{15}$  и  $x_1 + x_2 + x_6 = s_m$ . Найдите все возможные значения  $m$ .

3. На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  выбраны точки  $P$  и  $Q$  так, что  $P$  лежит между  $B$  и  $Q$ . Лучи  $AP$  и  $AQ$  делят угол  $BAC$  на три равные части. Оказалось, что треугольник  $APQ$  является остроугольным. Обозначим через  $B_1, P_1, Q_1, C_1$  проекции точек  $B, P, Q, C$  на прямые  $AP, AQ, AP, AQ$  соответственно. Докажите, что прямые  $B_1P_1$  и  $C_1Q_1$  пересекаются на прямой  $BC$ .