Комлексные числа

В некоторых задачах вам понадобится **основная теорема алгебры**: любой непостоянный многочлен с комплексными коэффициентами имеет комплексный корень. Следствие: любой многочлен степени n с комплексными коэффициентами имеет ровно n комплексных корней с учётом кратности.

1. Пусть многочлен $P(x^n)$ делится на $x-1$. Докажите, что $P(x^n)$ делится на x^n-1.

2. **(а)** Пусть f — многочлен с действительными коэффициентами, и пусть $z \in \mathbb{C}$. Докажите, что если $f(z)=0$, то $f(\overline{z})=0$.
(б) Докажите, что любой многочлен с действительными коэффициентами можно разложить в произведение многочленов с действительными коэффициентами степени не выше 2.

3. Многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами принимает только положительные значения. Докажите, что найдутся многочлены $Q(x)$ и $R(x)$ с действительными коэффициентами такие, что $P(x)=Q^2(x)+R^2(x)$.

4. Пусть $P_k(x) = x^{k-1}+x^{k-2}+\ldots+x+1$, $Q_n(x) = P_1(x)P_2(x)\ldots P_n(x)$. Докажите, что многочлен $Q_{n+m}(x)$ делится на многочлен $Q_n(x)Q_m(x)$.

5. Докажите следующее утверждение. Пусть r — нечётное число и ε — примитивный корень из единицы степени r (т. е. $\varepsilon^r=1$, $\varepsilon^k \neq 1$ при $1 \leqslant k < r$). Тогда

$$(1+\varepsilon)(1+\varepsilon^2)\ldots(1+\varepsilon^r)=2.$$

6. Пусть $M \subset \mathbb{C}\backslash\{0\}$ — множество, удовлетворяющее свойству: если $x, y \in M$, то $x/y \in M$. Известно, что M состоит из n элементов. Найдите M.

7. Докажите, что модуль комплексного числа $z=\frac{2+i}{2-i}$ равен 1, но это число не является корнем степени n из единицы ни при каком натуральном n.

8. Пусть P — многочлен чётной степени с комплексными коэффициентами. Известно, что все корни P имеют модуль 1, причём P не имеет вещественных корней. Докажите, что $P(1) \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда $P(-1) \in \mathbb{R}$.

9. Можно ли так отметить 2020 точек на единичной окружности, чтобы все попарные расстояния между ними были рациональны?