

Комплексные числа

В некоторых задачах вам понадобится **основная теорема алгебры**: любой непостоянный многочлен с комплексными коэффициентами имеет комплексный корень. Следствие: любой многочлен степени n с комплексными коэффициентами имеет ровно n комплексных корней с учётом кратности.

1. Пусть многочлен $P(x^n)$ делится на $x - 1$. Докажите, что $P(x^n)$ делится на $x^n - 1$.
2. При каких n многочлен $(x + 1)^n - x^n - 1$ делится на $x^2 + x + 1$?
3. (а) Пусть f — многочлен с действительными коэффициентами, и пусть $z \in \mathbb{C}$. Докажите, что если $f(z) = 0$, то $f(\bar{z}) = 0$.
(б) Докажите, что любой многочлен с действительными коэффициентами можно разложить в произведение многочленов с действительными коэффициентами степени не выше 2.
4. Многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами принимает только положительные значения. Докажите, что найдутся многочлены $Q(x)$ и $R(x)$ с действительными коэффициентами такие, что $P(x) = Q^2(x) + R^2(x)$.
5. Пусть $P_k(x) = x^{k-1} + x^{k-2} + \dots + x + 1$, $Q_n(x) = P_1(x)P_2(x)\dots P_n(x)$. Докажите, что многочлен $Q_{n+m}(x)$ делится на многочлен $Q_n(x)Q_m(x)$.
6. Докажите следующее утверждение. Пусть r — нечётное число и ε — примитивный корень из единицы степени r (т. е. $\varepsilon^r = 1$, $\varepsilon^k \neq 1$ при $1 \leq k < r$). Тогда

$$(1 + \varepsilon)(1 + \varepsilon^2)\dots(1 + \varepsilon^r) = 2.$$

7. Пусть $M \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ — множество, удовлетворяющее свойству: если $x, y \in M$, то $x/y \in M$. Известно, что M состоит из n элементов. Найдите M .
8. Докажите, что модуль комплексного числа $z = \frac{2+i}{2-i}$ равен 1, но это число не является корнем степени n из единицы ни при каком натуральном n .