

Функциональные уравнения

(Почти) во всех задачах по умолчанию надо найти все функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяющие указанному условию. Когда ты видишь ФУРу, то спроси себя:

Нет ли хорошей замены?

1. $f(3x + 5) = x^2 + 1$.
2. $f(x^2) = |x| + 2$.

Не пишется ли обычная система уравнений?

3. $x^2 f(x) + f(1 - x) = 2x - x^4$.

Нельзя ли разделить переменные: $A(x) = B(y)$?

4. $f(x) - f(y) = x^3 - y^3$.

Нельзя ли отловить нарушение симметрии?

5. $f(x + y) = x + f(y)$.

Нельзя ли посчитать $f(0), f(1), f(2), f(-1)$ и т.п. и использовать это?

6. $f(x)f(y) = f(xy) + x + y$.

Не является ли функция инъективной?

7. Докажите инъективность функции с условием $f(f(x) + f(y)) = x + y$.
8. Найдите все инъективные функции со свойством $f(x + f(y)) = f(f(x)) + f(y)$.

Не является ли функция сюръективной?

9. Докажите сюръективность функции с условием $f(f(x) + f(y)) = x + y$.

Не будет ли полезным найти одно решение, и его отнять от $f(x)$, особенно если ты предполагаешь, что решение одно?

10. Найдите все многочлены со свойством $P(x + 1) = P(x) + 2x + 1$.

Для самоопрашивания

11. $xf(y) + yf(x) = 0$.
12. $f\left(\frac{x+1}{x}\right) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ при $x \neq 0$.
13. $f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}f(-x) = x$ при $x \neq 0$.
14. $f(f(x+y)) = x + f(y)$.
15. $f(x-y) = f(x) + f(y) - 2xy$.
16. $f(x-y) = f(x+y)f(y)$.

Для решивших всё предыдущее

17. $f(x^2 - y^2) = x^2 - f(y^2)$.
18. $f(x+y) - f(x-y) = 4xy$. Указание: естественная замена.
19. $xf(y) + yf(x) = (x+y)f(x)f(y)$. Указание: не теряем случаи!
20. $f(x+y+f(y)) = f(f(x)) + 2y$. Указание: сначала докажете инъективность.