

## Функциональные уравнения

(Почти) во всех задачах по умолчанию надо найти все функции  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  удовлетворяющие указанному условию. Когда ты видишь ФУРу, то спроси себя:

### Нет ли хорошей замены?

1.  $f(3x + 5) = x^2 + 1$ .
2.  $f(x^2) = |x| + 2$ .

### Не пишется ли обычная система уравнений?

3.  $x^2 f(x) + f(1 - x) = 2x - x^4$ .

### Нельзя ли разделить переменные: $A(x) = B(y)$ ?

4.  $f(x) - f(y) = x^3 - y^3$ .

### Нельзя ли отловить нарушение симметрии?

5.  $f(x + y) = x + f(y)$ .

### Нельзя ли посчитать $f(0), f(1), f(2), f(-1)$ и т.п. и использовать это?

6.  $f(x)f(y) = f(xy) + x + y$ .

### Не является ли функция инъективной?

7. Докажите инъективность функции с условием  $f(f(x) + f(y)) = x + y$ .
8. Найдите все инъективные функции со свойством  $f(x + f(y)) = f(f(x)) + f(y)$ .

### Не является ли функция сюръективной?

9. Докажите сюръективность функции с условием  $f(f(x) + f(y)) = x + y$ .

### Не будет ли полезным найти одно решение, и его отнять от $f(x)$ , особенно если ты предполагаешь, что решение одно?

10. Найдите все многочлены со свойством  $P(x + 1) = P(x) + 2x + 1$ .

### Для самоопрашивания

11.  $xf(y) + yf(x) = 0$ .
12.  $f\left(\frac{x+1}{x}\right) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$  при  $x \neq 0$ .
13.  $f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}f(-x) = x$  при  $x \neq 0$ .
14.  $f(f(x+y)) = x + f(y)$ .
15.  $f(x-y) = f(x) + f(y) - 2xy$ .
16.  $f(x-y) = f(x+y)f(y)$ .

### Для решивших всё предыдущее

17.  $f(x^2 - y^2) = x^2 - f(y^2)$ .
18.  $f(x+y) - f(x-y) = 4xy$ .
19.  $xf(y) + yf(x) = (x+y)f(x)f(y)$ .
20.  $f(x+y+f(y)) = f(f(x)) + 2y$ .