

Линейность в геометрии

Определение. Функция $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ называется *линейной*, если для любой точки C , делящей прямую AB в отношении $a : b$, выполнено равенство: $f(C) = \frac{b}{a+b}f(A) + \frac{a}{a+b}f(B)$.

Определение. Функция $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ называется *линейной*, если существуют a, b, c такие, что для любой точки (x, y) плоскости $f((x, y)) = ax + by + c$.

Покажите, что ориентированное расстояние до прямой — линейная функция.

Покажите, что для фиксированных точек A и B ориентированная площадь треугольника ABX есть линейная функция от точки X .

Предложение. Если $f(X)$ — линейная функция на плоскости, то ГМТ M таких, что $f(M) = 0$ есть либо прямая, либо вся плоскость, либо пустое множество.

1. Внутри треугольника ABC расположен треугольник PQR . Известно, что сумма расстояний от вершины треугольника PQR до сторон треугольника ABC не зависит от выбора вершины треугольника PQR . Докажите, что треугольник ABC — правильный.
2. d_1, d_2, d_3 — длины медиан треугольника, P — произвольная точка плоскости, а s_1, s_2, s_3 — расстояния от точки P до соответствующих медиан. Докажите, что одно из произведений d_1s_1, d_2s_2, d_3s_3 равно сумме двух других.
3. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AK и BL . На отрезке KL взята произвольная точка X , из которой опущены перпендикуляры XP, XQ и XR на стороны AC, BC и AB соответственно. Докажите, что $XP + XQ = XR$.
4. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Докажите, что для любой точки O внутри пирамиды сумма объёмов тетраэдров $OSAB$ и $OSCD$ равна сумме объёмов тетраэдров $OSCB$ и $OSAD$.
5. (а) Докажите, что для почти любого четырёхугольника $ABCD$ ГМТ точек P таких, что сумма ориентированных площадей треугольников ABP и CDP равна сумме ориентированных площадей треугольников BSP и DAP , есть прямая. Когда это неверно? Докажите существование прямой Гаусса (то есть прямой, проходящей через середины двух диагоналей четырёхугольника и середину отрезка, соединяющего точки пересечения продолжений его противоположных сторон). (б) Докажите что, если четырёхугольник описанный, то центр вписанной окружности лежит на прямой Гаусса.
6. Продолжения сторон AB и CD четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке P , а продолжения сторон BC и AD — в точке Q . Получилось так, что три пары внешних биссектрис: при вершинах A и C , при вершинах B и D и при вершинах P и Q имеют точки пересечения. Докажите, что они лежат на одной прямой.

7. Середины отрезков A_1A_2 , B_1B_2 , C_1C_2 лежат на одной прямой. Докажите, что 8 треугольников $A_iB_jC_k$ можно так разбить на 2 группы, что суммы площадей в группах равны.
8. Дан параллелограмм $ABCD$. Точка X такова, что $CX \perp BD$. Из точки X опущены перпендикуляры XB' и XC' на прямые AB и AC , $B' \in AB$, $D' \in AD$. Докажите, что $BB' \cdot BA = DD' \cdot DA$.
9. Каждая диагональ пятиугольника отсекает от него треугольник. Докажите, что сумма площадей этих пяти треугольников не меньше площади пятиугольника.