Линейность в геометрии

Определение. Функция $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ называется *линейной*, если для любой точки C, делящей прямую AB в отношении $a : b$, выполнено равенство: $f(C) = \frac{b}{a+b}f(A) + \frac{a}{a+b}f(B)$.

Определение. Функция $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ называется *линейной*, если существуют a, b, c такие, что для любой точки (x, y) плоскости $f\big((x, y)\big) = ax + by + c$.

Покажите, что ориентированное расстояние до прямой — линейная функция.

Покажите, что для фиксированных точек A и B ориентированная площадь треугольника ABX есть линейная функция от точки X.

Предложение. Если $f(X)$ — линейная функция на плоскости, то ГМТ M таких, что $f(M) = 0$ есть либо прямая, либо вся плоскость, либо пустое множество.

1. Внутри треугольника ABC расположен треугольник PQR. Известно, что сумма расстояний от вершины треугольника PQR до сторон треугольника ABC не зависит от выбора вершины треугольника PQR. Докажите, что треугольник ABC — правильный.

2. d_1, d_2, d_3 — длины медиан треугольника, P — произвольная точка плоскости, а s_1, s_2, s_3 — расстояния от точки P до соответствующих медиан. Докажите, что одно из произведений d_1s_1, d_2s_2, d_3s_3 равно сумме двух других.

3. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Докажите, что для любой точки O внутри пирамиды сумма объёмов тетраэдров $OSAB$ и $OSCD$ равна сумме объёмов тетраэдров $OSCB$ и $OSAD$.

4. **(а)** Докажите, что для почти любого четырехугольника $ABCD$ ГМТ точек P таких, что сумма ориентированных площадей треугольников ABP и CDP равна сумме ориентированных площадей треугольников BCP и DAP, есть прямая. Когда это неверно? Докажите существование прямой Гаусса (то есть прямой, проходящей через середины двух диагоналей четырёхугольника и середину отрезка, соединяющего точки пересечения продолжений его противоположных сторон). **(б)** Докажите что, если четырёхугольник описанный, то центр вписанной окружности лежит на прямой Гаусса.

5. Продолжения сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P, а продолжения сторон BC и AD — в точке Q. Получилось так, что три пары внешних биссектрис: при вершинах A и C, при вершинах B и D и при вершинах P и Q имеют точки пересечения. Докажите, что они лежат на одной прямой.

6. Середины отрезков A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 лежат на одной прямой. Докажите, что 8 треугольников $A_iB_jC_k$ можно так разбить на 2 группы, что суммы площадей в группах равны.

7. Дан параллелограмм $ABCD$. Точка X такова, что $CX \perp BD$. Из точки X опущены перпендикуляры XB' и XC' на прямые AB и AC, $B' \in AB$, $D' \in AD$. Докажите, что $BB' \cdot BA = DD' \cdot DA$.

8. В треугольнике ABC провели биссектрисы CC_1 и AA_1. Прямая A_1C_1 пересекает описанную окружность ABC в точке X (на дуге AB). Докажите, что $\frac{1}{AX} = \frac{1}{BX} + \frac{1}{CX}$.

9. Каждая диагональ пятиугольника отсекает от него треугольник. Докажите, что сумма площадей этих пяти треугольников не меньше площади пятиугольника.

10. Докажите, что прямая, проходящая через основания внешних биссектрис, перпендикулярна OI.