

Игры

1. Есть куб. Первый красит три его ребра в красный цвет, потом второй красит ещё три ребра в синий цвет, потом первый красит три ребра в красный, потом второй — оставшиеся три ребра в синий. Каждое ребро красить можно только один раз. Выигрывает тот, кому удалось покрасить в свой цвет рёбра одной грани и не дать сделать того же сопернику. Кто выигрывает?
2. Двое по очереди пишут в клетках кубика $2 \times 2 \times 2$ числа $1, 2, 3, \dots, 24$ (каждое число один раз). Второй игрок хочет, чтобы суммы чисел в клетках каждого кольца из 8 клеток, опоясывающего куб, были одинаковыми. Может ли первый ему помешать?
3. В концах полоски 1×101 сидят кузнечики, которые умеют прыгать на 1, 2, 3 или 4 клетки. Каждый из них стремится попасть в противоположный конец полоски раньше соперника. Нельзя прыгать в клетку, где уже сидит кузнечик. Какой кузнечик выигрывает?
4. Петя и Вася играют в игру на изначально белой доске 20×20 . Петя начинает и каждым своим ходом закрашивает одну клетку доски в красный цвет, а Вася — в синий. Игроки ходят поочерёдно, перекрашивать ранее закрашенные клетки запрещено. В конце игры (когда все клетки доски закрашены) Петя находит красный клетчатый прямоугольник наибольшей площади, и Вася платит ему столько долларов, сколько в этом прямоугольнике клеток. Какой наибольший заработок может гарантировать себе Петя вне зависимости от игры Васи?
5. На доске $n \times n$ двое по очереди ходят фишкой. Сначала она стояла в углу, ходить можно на соседнюю по стороне клетку, на которой фишка еще не была. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Докажите, что при чётном n выигрывает первый, а при нечётном — второй игрок.
6. На изначально белой доске 2020×2021 двое по очереди закрашивают связанные фигуры из 9 клеток (перекрашивать уже закрашенные клетки запрещено). Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его соперник?

Фигура из нескольких клеток называется связанной, если из любой клетки фигуры можно перейти в любую другую переходя только в соседние по стороне клетки фигуры.
7. Два игрока по очереди выписывают на доске в ряд слева направо произвольные цифры. Проигрывает игрок, после хода которого одна или несколько цифр, записанных подряд, образуют число, делящееся на 11. Кто из игроков победит при правильной игре?