Про площадь

1. В параллелограмме проведены биссектрисы четырёх его внутренних углов. Докажите, что отношение площади четырёхугольника, ограниченного биссектрисами, к площади параллелограмма не зависит от величины угла параллелограмма.

2. Диагонали трапеции равны 10 и 24, а её площадь равна 120. Найдите длину средней линии.

3. Квадрат $ABCD$ вписан в окружность. Точка M лежит на дуге BC, прямая AM пересекает BD в точке P, прямая DM пересекает AC в точке Q.
(а) Докажите, что треугольники APD и QDA подобны.
(б) Докажите, что $S_{ABP} = S_{PQD}$.

4. Диагонали четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность с центром O, пересекаются в точке M. Описанная окружность треугольника ABM пересекает отрезки AD и BC в точках N и K соответственно. Известно, что точка O лежит внутри треугольника AMB. Докажите, что четырехугольники $NOMD$ и $KOMC$ имеют равные площади.

5. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1 и на сторонах AB и AC взяты точки K и L так, что $AK = BC_1$ и $AL = CB_1$. Докажите, что прямая AO, где O — центр описанной окружности треугольника ABC, делит отрезок KL пополам.

6. Продолжение биссектрисы AD остроугольного треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке E. Из точки D на стороны AB и AC опущены перпендикуляры DP и DQ. Докажите, что $S_{ABC} = S_{APEQ}$.

7. Продолжения медиан AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекают его описанную окружность в точках A_0, B_0 и C_0 соответственно. Оказалось, что площади треугольников ABC_0, AB_0C и A_0BC равны. Докажите, что треугольник ABC равносторонний.

8. Медианы треугольника ABC пересекаются в точке M. На прямой, проходящей через точку A параллельно BC, выбрана точка D так, что $\angle CMD = 90°$. Площадь четырёхугольника $AMCD$ равна S. Какое минимальное значение принимает произведение $AB \cdot CD \geqslant 2S$?

[ЦПМ, кружок по математике, 10 класс]

[*2021–2022*] группа: 10-2 *25 ноября 2021 г.*

Про площадь

1. В параллелограмме проведены биссектрисы четырёх его внутренних углов. Докажите, что отношение площади четырёхугольника, ограниченного биссектрисами, к площади параллелограмма не зависит от величины угла параллелограмма.

2. Диагонали трапеции равны 10 и 24, а её площадь равна 120. Найдите длину средней линии.

3. Квадрат $ABCD$ вписан в окружность. Точка M лежит на дуге BC, прямая AM пересекает BD в точке P, прямая DM пересекает AC в точке Q.
(а) Докажите, что треугольники APD и QDA подобны.
(б) Докажите, что $S_{ABP} = S_{PQD}$.

4. Диагонали четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность с центром O, пересекаются в точке M. Описанная окружность треугольника ABM пересекает отрезки AD и BC в точках N и K соответственно. Известно, что точка O лежит внутри треугольника AMB. Докажите, что четырехугольники $NOMD$ и $KOMC$ имеют равные площади.

5. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1 и на сторонах AB и AC взяты точки K и L так, что $AK = BC_1$ и $AL = CB_1$. Докажите, что прямая AO, где O — центр описанной окружности треугольника ABC, делит отрезок KL пополам.

6. Продолжение биссектрисы AD остроугольного треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке E. Из точки D на стороны AB и AC опущены перпендикуляры DP и DQ. Докажите, что $S_{ABC} = S_{APEQ}$.

7. Продолжения медиан AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекают его описанную окружность в точках A_0, B_0 и C_0 соответственно. Оказалось, что площади треугольников ABC_0, AB_0C и A_0BC равны. Докажите, что треугольник ABC равносторонний.

8. Медианы треугольника ABC пересекаются в точке M. На прямой, проходящей через точку A параллельно BC, выбрана точка D так, что $\angle CMD = 90°$. Площадь четырёхугольника $AMCD$ равна S. Какое минимальное значение принимает произведение $AB \cdot CD \geqslant 2S$?