

Триангуляция

1. Докажите, что при $n \geq 4$ в любом разрезании выпуклого n -угольника диагоналями на треугольники найдутся два треугольника, две стороны каждого из которых служат сторонами исходного n -угольника («уши триангуляции»).
2. Многоугольник разрезан непересекающимися диагоналями на треугольники. Докажите, что вершины многоугольника можно раскрасить в три цвета так, что все вершины каждого из полученных треугольников будут разного цвета.
3. Вершины выпуклого многоугольника раскрашены в три цвета так, что никакие две соседние вершины не покрашены в один цвет и все цвета присутствуют. Докажите, что многоугольник можно разрезать диагоналями на треугольники, в каждом из которых все вершины разного цвета.
4. Выпуклый многоугольник разрезан диагоналями на равнобедренные треугольники. Докажите, что в исходном многоугольнике есть две равные стороны.
5. Сколько существует способов разрезать выпуклый n -угольник диагоналями на треугольники так, чтобы никакой треугольник не имел в качестве всех трёх своих сторон три диагонали исходного n -угольника?
6. Назовём раскраску вершин n -угольника в 3 цвета *потрясающей*, если этот многоугольник можно разрезать на треугольники, в каждом из которых встречаются все цвета. Сколько существует потрясающих раскрасок?
7. Докажите, что выпуклый многоугольник может быть разрезан непересекающимися диагоналями на остроугольные треугольники не более чем одним способом.
8. Выпуклый n -угольник разбит на треугольники непересекающимися диагоналями, причём в каждой его вершине сходится нечётное число треугольников. Докажите, что n делится на 3.