

Триангуляция

1. Выпуклый многоугольник разрезан диагоналями на равнобедренные треугольники. Докажите, что в исходном многоугольнике есть две равные стороны.
2. Вершины выпуклого многоугольника раскрашены в три цвета так, что никакие две соседние вершины не покрашены в один цвет и все цвета присутствуют. Докажите, что многоугольник можно разрезать диагоналями на треугольники, в каждом из которых все вершины разного цвета.
3. Докажите, что выпуклый многоугольник может быть разрезан непересекающимися диагоналями на остроугольные треугольники не более чем одним способом.
4. Назовём раскраску вершин n -угольника в 3 цвета *потрясающей*, если этот многоугольник можно разрезать на треугольники, в каждом из которых встречаются все цвета.
 - (а) Сформулируйте и докажите необходимые и достаточные условия для потрясающей раскраски.
 - (б) Найдите количество потрясающих раскрасок.
5. Выпуклый n -угольник разбит на треугольники непересекающимися диагоналями, причём в каждой его вершине сходится нечётное число треугольников. Докажите, что n делится на 3.
6. Вписанный многоугольник разрезан непересекающимися диагоналями на треугольники. Докажите, что сумма радиусов вписанных окружностей этих треугольников не зависит от способа разрезания.
7. Дан выпуклый n -угольник. Назовём окружность *полувписанной*, если она полностью лежит в этом n -угольнике и касается трёх его сторон. Известно, что никакие четыре прямые, содержащие стороны n -угольника, не касаются одной окружности. Докажите, что полувписанных окружностей ровно $n - 2$.