

## Дистанционная олимпиада — 6

1. Олег нарисовал пустую таблицу  $50 \times 50$  и написал сверху от каждого столбца и слева от каждой строки по числу. Оказалось, что все 100 написанных чисел различны, причём 50 из них рациональные, а остальные 50 — иррациональные. Затем в каждую клетку таблицы он записал произведение чисел, написанных около её строки и её столбца («таблица умножения»). Какое наибольшее количество произведений в этой таблице могли оказаться рациональными числами?
2. На основании  $AD$  равнобедренной трапеции  $ABCD$  выбрана точка  $L$  таким образом, что  $BL$  — биссектриса угла  $ABD$ . На отрезках  $AC$  и  $CD$  выбраны точки  $P$  и  $Q$  соответственно таким образом, что  $AP = AL$  и  $DL = DQ$ . Докажите, что точки  $P, B, C, Q$  лежат на одной окружности.
3. Натуральное число  $n$  без нулей в записи назовём *фантастическим*, если какую-то его цифру можно удалить и получить делитель числа  $n$ . Например, 25 — фантастическое, так как можно удалить 2 и получить 5 — делитель числа 25. Докажите, что фантастических чисел конечное количество.
4. На плоскости отмечено  $n$  точек (никакие три не лежат на одной прямой). Между каждыми двумя из них проходит отрезок — синий, красный или зеленый. Оказалось, что любой треугольник с вершинами в отмеченных точках имеет стороны ровно двух цветов. Докажите, что  $n \leq 12$ .