

Биномиальные коэффициенты

1. Пусть n — нечётное число. Докажите, что среди чисел $C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^{\frac{n-1}{2}}$ нечётное число нечётных чисел.
2. Сколько ненулевых по модулю два слагаемых стоит в правой части формулы бинома Ньютона

$$(a + b)^n = a^n + \dots + b^n,$$

если **(а)** $n = 64$; **(б)** $n = 2021$?

3. Для натуральных чисел $n \geq m \geq 1$ докажите, что $\left(\frac{\text{НОД}(n, m)}{n} \cdot C_n^m\right)$ — целое число.
4. Докажите, что последовательность остатков чисел $C_{2021}^{2021}, C_{2022}^{2021}, C_{2023}^{2021}, \dots$ по модулю 2021 имеет период.
5. Даны два натуральных числа $n \geq m \geq 1$. Докажите, что выражение

$$n \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k C_n^k$$

делится на m .

6. Для любых натуральных $0 < n < m < k$ докажите, что числа C_k^n и C_k^m имеют общий делитель.
7. Докажите, что

$$C_{2n+1}^0 \cdot 2^{2n} \cdot 3^0 + C_{2n+1}^2 \cdot 2^{2n-2} \cdot 3^1 + \dots + C_{2n+1}^{2n} \cdot 2^0 \cdot 3^n$$

является суммой двух подряд идущих точных квадратов.