Процессы

1. В вершинах единичного квадрата сидят три кузнечика. Они могут передвигаться так: кузнечик перепрыгивает через любого из двух остальных, перелетая его на расстояние, на которое он до него прыгал. Могут ли через какое-то время кузнечики оказаться в вершинах квадрата со стороной 2?

2. По кругу расположены 30 монет, чередуясь: три подряд орлом, три решкой, три орлом, три решкой и т. д. Если у монеты два соседа лежат по-разному, её можно перевернуть. Какое наибольшее число монет можно положить орлом с помощью таких операций?

3. В колоде часть карт лежит рубашкой вниз. Время от времени Ваня вынимает из колоды пачку из одной или нескольких подряд идущих карт, в которой верхняя и нижняя карты лежат рубашкой вниз, переворачивает всю пачку как одно целое и вставляет ее в то же место колоды (если «пачка» состоит лишь из одной карты, то требуется только, чтобы она лежала рубашкой вниз). Докажите, что в конце концов все карты лягут рубашкой вверх, как бы ни действовал Ваня.

4. В каждой клетке доски 8×8 нарисована стрелка (вверх, вниз, вправо или влево). Фишка ставиться на произвольную клетку. Каждым ходом фишка сдвигается на соседнюю клетку в направлении стрелки, а сама стрелка поворачивается на 90° по часовой стрелке. Докажите, что фишка рано или поздно свалится с доски.

5. На окружности расставлено несколько положительных чисел, каждое из которых не больше 1. Докажите, что можно разделить окружность на сто дуг так, что суммы чисел на соседних дугах будут отличаться не больше, чем на 1. (Если на дуге нет чисел, то сумма на ней считается равной нулю.)

6. Натуральное число кратно 4. Все его делители выписали в строку в порядке возрастания. Докажите, что в этой строке найдется пара соседей с разностью 2.

7. На бесконечном листе клетчатой бумаги N клеток окрашено в чёрный цвет. Докажите, что из этого листа можно вырезать конечное число клетчатых квадратов так, что будут выполняться два условия:

- все чёрные клетки лежат в вырезанных квадратах;
- в любом вырезанном квадрате K площадь чёрных клеток составит не менее $1/5$ и не более $4/5$ площади K.

8. По кругу расставлены $n \geqslant 10$ фишек, у каждой из которых одна сторона чёрная, а другая белая. В начале одна фишка лежит чёрной стороной вверх, а остальные — белой стороной вверх. Разрешается проделать следующую операцию: взять три любые фишки, лежащие подряд, первая из которых (считая по часовой стрелке) лежит чёрной стороной вверх, перевернуть вторую из них и переложить первую на место третьей, вторую на место первой и третью на место второй. Можно ли для любого непустого набора мест добиться того, чтобы чёрные сверху фишки лежали на всех этих местах и только на них.