

## Последовательности

1. Дана последовательность  $\{x_n\}$ , в которой  $x_1 = 1$  и  $x_{n+1} = n \sin x_n + 1$  при всех  $n \geq 1$ . Докажите, что эта последовательность не является периодической.
2. Последовательность неотрицательных рациональных чисел  $a_1, a_2, a_3, \dots$  удовлетворяет соотношению  $a_m + a_n = a_{mn}$  при любых натуральных  $m, n$ . Докажите, что не все её члены различны.
3. Последовательность  $x_n$  удовлетворяет следующим условиям

$$x_1 = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1.$$

Докажите, что  $x_n \leq \frac{2n-1}{2n}$ .

4. Последовательность  $a_n$  определена следующим образом

$$a_0 = M + \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad a_{k+1} = a_k \lfloor a_k \rfloor.$$

При каких натуральных  $M$  в последовательности встретится хотя бы одно целое число?

5. Последовательность  $a_n$  состоит из различных натуральных чисел. Докажите, что существует бесконечно много простых  $p$  таких, что существуют различные  $i, j, k$ , для которых выполнено  $a_i a_j a_k - 1 \div p$ .
6. Докажите, что существует ровно одна последовательность целых чисел, удовлетворяющая свойствам:  $a_1 = 1$ ,  $a_2 > 1$ ,  $a_{n+1}^3 + 1 = a_n a_{n+2}$  при всех натуральных  $n$ .
7.  $\{a_n\}$  и  $\{b_n\}$  — последовательности ненулевых цифр. Для  $n \geq 1$  выполнено

$$\left( \overline{b_n \dots b_2 b_1}^2 + 999 \right) \div \left( \overline{a_n \dots a_2 a_1}^2 + 999 \right).$$

Докажите, что последовательности совпадают.