

Защикливание и не только

1. Каждое следующее число в последовательности целых чисел получается из предыдущего так: число возводится в квадрат, из него вычеркиваются все цифры, кроме последних четырех. Докажите, что последовательность периодическая (возможно, с предпериодом), причем длина периода не больше 625.
2. На бесконечной ленте записаны в ряд 3 цифры. Справа к ним приписывают цифру, на которую оканчивается их сумма, а первую цифру после этого стирают. Докажите, что когда-то цифры начнут повторяться по циклу. Докажите, что для этого потребуется не более 500 операций.
3. Докажите, что для любого натурального числа n найдётся число Фибоначчи, кратное n .
4. В круговых автогонках участвовали четыре гонщика. Их машины стартовали одновременно из одной точки и двигались с постоянными скоростями. Известно, что после начала гонок для любых трех машин нашелся момент, когда они встретились. Докажите, что после начала гонок найдется момент, когда встретятся все 4 машины. (Гонки считаем бесконечно долгими по времени.)
5. Клетки квадрата 3×3 раскрашены в один из трёх цветов: белый, серый или чёрный. В начале все угловые клетки покрашены в один цвет, а все остальные — в другой. Каждую секунду
 - все белые клетки, которые имели черных соседей, становятся серыми;
 - все серые клетки, которые имели белых соседей становятся черными,
 - все черные клетки, которые имели серых соседей становятся белыми.

Докажите, что последовательность раскрасок периодична и докажите, что её период не более, чем 24 секунд.

6. По кругу расставлено несколько коробочек. В каждой из них может лежать один или несколько шариков (или она может быть пустой). За один ход разрешается взять все шарики из коробочки и разложить их, двигаясь по часовой стрелке, начиная со следующей коробочки, кладя в каждую коробочку по одному шарик. На каждом следующем ходе шарики берут из той коробочки, в которую попал последний шарик на предыдущем ходе.
 - (а) Докажите, что в какой-то момент повторится начальное размещение шариков.
 - (б) Докажите, что за несколько ходов из любого начального размещения шариков по коробочкам можно получить любое другое.
7. В тридцатом королевстве у каждого замка и каждой развилки сходятся три дороги. Рыцарь выехал из своего замка и по очереди поворачивает то направо, то налево.
 - (а) Докажите, что его маршрут зашкликнется.
 - (б) Одновременно с рыцарем из замка выехали несколько его сыновей. Они путешествовали по тем же правилам. Будем считать, что все дороги имеют одинаковую длину, а скорости рыцаря и его сыновей одинаковые. Докажите, что рано или поздно рыцарь и его сыновья одновременно вернуться в замок.