Гармонические четырёхугольники

Определение. Вписанный в окружность ω с центром в точке O четырёхугольник $ABCD$ является *гармоническим*, если:

- $AB \cdot CD = BC \cdot AD$;
- касательные, проведённые к ω в точках A и C пересекаются на прямой BD;
- биссектрисы углов A и C пересекаются на диагонали BD;
- диагональ BD содержит симедиану треугольника ACD;
- Углы AMB и BCD равны, где M — середина диагонали AC;
- Углы AMB и AMD равны;
- Треугольники AMB и DCB подобны;
- Точки A, M, O и C лежат на одной окружности или на прямой.

1. Описанная окружность треугольника ABC пересекает прямую, содержащую его медиану BM, в точках B и D. Касательные к этой окружности в точках A и C пересекаются в точке P. Центр этой окружности — точка O. Докажите, что точка M — радикальный центр трёх окружностей, каждая из которых проходит через хотя бы четыре из обозначенных точек. Докажите, что $\angle BPA = \angle DPC$. Пусть точка K такова, что $ABCK$ — параллелограмм. Докажите, что точки K и P изогонально сопряжены в треугольнике ABC. Докажите, что BP содержит симедиану треугольника ABC.

2. Докажите эквивалентность определений гармонического четырёхугольника. Докажите, что у вписанного четырёхугольника касательные к его описанной окружности в точках A и C пересекаются на прямой BD тогда и только тогда, когда касательные к этой же окружности в точках B и D пересекаются на прямой AC.

3. Пусть P и Q — основания внутренней и внешней биссектрис угла B треугольника ABC. Докажите, что общая хорда (ABC) и (PBQ) содержит симедиану треугольника ABC.

4. Касательные в точках A и C к описанной окружности треугольника ABC пересекаются в точке D. Прямая BD вторично пересекает описанную окружность треугольник ABC в точке E, а точка F — середина BE. Докажите, что точки A, F, C и D лежат на одной окружности.

5. В окружности S проведены две параллельные хорды AB и CD. Прямая, проведенная через C и середину AB, вторично пересекает окружность в точке E. Точка K — середина отрезка DE. Докажите, что $\angle AKE = \angle BKE$.

6. Пусть PT и PB — две касательные к окружности, AB — её диаметр, и TH — перпендикуляр, опущенный из точки T на AB. Докажите, что прямая AP делит пополам отрезок TH.

7. Пусть M и N — соответственно середины диагоналей AC и BD гармонического четырёхугольника, вписанного в окружность Ω, Прямые AN и DM вторично пересекают Ω в точках X и Y. Докажите, что $XY \parallel AD$.

8. *Аватарка «Проецируй».* В треугольнике ABC M — середина стороны AC, а D такая точка на дуге AC окружности (ABC), не содержащей точку B, что $\angle ABM = \angle CBD$. Прямая, проходящая через B пересекает сторону AC и окружность (ABC) в точках P и Q. Докажите, что точки P, Q, M, D лежат на одной окружности.

9. В остроугольном треугольнике ABC ($AC > AB$) провели биссектрису AL и медиану AM, последнюю продлили до пересечения с описанной окружностью треугольника в точке D. Точка F симметрична L относительно M. Выразите угол FDA через углы треугольника ABC.

10. Пусть $ABCD$ — параллелограмм, прямая l проходит через B перпендикулярно BC. Две окружности с общей хордой CD касаются прямой l в точках P и Q. Докажите, что отрезки DP и DQ видны из середины AB под равными углами.