Гармонические четырехугольники

Определение. *Симедианой* треугольника называется прямая, симметричная его медиане относительно биссектрисы угла, из которого проведена медиана.

1. **(а)** Пусть BM — симедиана треугольника ABC. Докажите, что $\frac{AM}{MC} = \frac{AB^2}{BC^2}$.

(б) **Точка Лемуана.** Докажите, что симедианы треугольника пересекаются в одной точке.

Определение. Вписанный четырехугольник называется *гармоническим*, если произведения длин его противоположных сторон равны.

2. **(а)** Пусть $ABCD$ — гармонический четырехугольник, M — точка пересечения его диагоналей. Докажите, что $\frac{AM}{MC} = \frac{AB^2}{BC^2} = \frac{AD^2}{DC^2}$.

(б) Докажите, что каждая диагональ гармонического четырехугольника является симедианой треугольников, на которые разбивает четырехугольник другая диагональ.

Определение. *Двойным отношением* упорядоченной четверки точек A, B, C, D, лежащих на одной прямой, называется величина

$$(A, B, C, D) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}.$$

В случае, если $(A, B, C, D) = -1$, четверка точек A, B, C, D называется *гармонической*.

3. **(а)** Пусть $ABCD$ — гармонический четырехугольник, M — точка пересечения его диагоналей, P — точка пересечения касательной к его описанной окружности в точке B и прямой AC. Докажите, что точки A, C, M, P образуют гармоническую четверку точек.

(б) Докажите, что вписанный четырехугольник $ABCD$ является гармоническим тогда и только тогда, когда касательные к его описанной окружности в точках B и D пересекаются на прямой AC, либо параллельны этой прямой.

(в) Докажите, что гармонический четырехугольник однозначно задается тремя своими вершинами (порядок обхода вершин также известен) и укажите способ его построения по трем данным вершинам.

(г) Диагональ BD вписанного четырехугольника $ABCD$ является симедианой треугольника ABC. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ гармонический.

4. Пусть N — середина диагонали AC гармонического четырехугольника $ABCD$. Докажите, что $\angle BNC = \angle DNC$.

5. Пусть PT и PB — две касательные к окружности, AB — ее диаметр, и TH — перпендикуляр, опущенный из точки T на AB. Докажите, что прямая AP делит пополам отрезок TH.

6. $ABCD$ — параллелограмм, прямая ℓ проходит через B перпендикулярно BC. Две окружности с общей хордой CD касаются прямой ℓ в точках P и Q. Докажите, что отрезки DP и DQ видны из середины AB под равными углами.