

Графы

1. В графе на 18 вершинах степень каждой вершины не более 3. Какое наибольшее количество циклов длины 4 может быть в этом графе?
2. В некоторой стране есть $n > 3$ аэропортов и n авиакомпаний, выполняющих двусторонние рейсы. При этом каждая компания выполняет хотя бы один рейс, и каждая пара городов соединена рейсом ровно одной из авиакомпаний. Докажите, что найдётся замкнутый маршрут, состоящий из трёх рейсов, в котором никакие два рейса не выполняются одной и той же авиакомпанией.
3. Компания из нескольких людей называется связной, если её нельзя разбить на две непустые группы так, что люди из разных групп будут не знакомы. В некоторой связной компании каждый знает ровно четверых, и четверо знакомых каждого человека образуют связную компанию. Докажите, что людей этой компании можно поставить по кругу так, чтобы любые два соседа были знакомы.
4. В городе на каждую площадь выходит не менее трёх улиц. На улицах введено одностороннее движение так, что можно проехать с любой площади на любую другую. Докажите, что можно запретить движение между двумя площадями так, что проезд сохранится.
5. В школе на 200 учеников организуют факультативные лекции. На каждую предложенную лекцию записалось хотя бы 10 учеников, и для любых двух учеников имеется не более одной лекции, на которую записались бы оба. Докажите, что можно провести все эти лекции в течение 211 дней так, что никому не придётся посетить две лекции за один день.