Дистанционная олимпиада — 5

1. Дан квадрат $ABCD$. Точка E на луче DC такова, что $\angle DAE = 65°$. На продолжении отрезка CB за точку B отметили точку F такую, что $\angle CFE = 40°$. Найдите $\angle FAB$.

2. Известно, что

$$xyz + x + y + z = xy + yz + xz + 5,$$

где $x, y, z \in \mathbb{R}$. Найдите минимальное значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.

3. В стране Драконии живут красные, зелёные и синие драконы. У каждого дракона три головы, каждая из которых всегда говорит только правду или всегда лжёт. При этом у каждого дракона хотя бы одна голова говорит правду. Однажды за круглый стол сели 530 драконов, и каждый из них сказал:

- 1-я голова: «Слева от меня зелёный дракон».
- 2-я голова: «Справа от меня синий дракон».
- 3-я голова: «Рядом со мной нет красного дракона».

Какое наибольшее количество красных драконов могло быть за столом?

4. Мастер по броскам в кольцо Евгений собирается сделать 100 бросков. Первый раз он попал, а второй промазал. Вероятность очередной раз попасть в кольцо равна проценту попаданий при всех предыдущих бросках. Найдите вероятность того, что он попадёт ровно 50 раз.

5. *Радикалом* $r(n)$ натурального числа n назовём произведение всех его простых делителей. Например $r(100) = 10$, $r(101) = 101$. Последовательность натуральных чисел задаётся первым членом a_1 и соотношением $a_{n+1} = a_n + r(a_n)$ при $n \geqslant 1$. Докажите, что в ней встретится миллион подряд идущих членов, образующих арифметическую прогрессию.

6. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ оказалось, что $AB + CD = \sqrt{2} \cdot AC$ и $BC + AD = \sqrt{2} \cdot BD$. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.