

## Диагностическая работа на тренировочную программу

1. Ира выписала на доску числа от 1 до  $n$ , а Ваня стёр одно из выписанных чисел. Какое число стёр Ваня, если сумма оставшихся чисел равна 101?
2. Даны две непересекающиеся окружности —  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Проведены их общая внешняя касательная —  $\ell_1$  и общая внутренняя касательная —  $\ell_2$ .

Прямая  $\ell_1$  касается  $\omega_1$  и  $\omega_2$  в точках  $A$  и  $C$ , прямая  $\ell_2$  касается  $\omega_1$  и  $\omega_2$  в точках  $O$  и  $B$  соответственно. Известно, что точка  $O$  лежит внутри треугольника  $ABC$ .

Докажите, что если  $AB = OC$ , то  $AB \perp OC$ .

3. На доске по кругу написано 100 натуральных чисел. За одну операцию разрешается число, которое больше обоих своих соседей, уменьшить на 1, а оба его соседа увеличить на 1. Может ли данный процесс длиться бесконечно?
4. В стране  $2020n + 1$  город, где  $n \in \mathbb{N}$ . Король решил построить дороги между некоторыми парами городов так, чтобы для любого города  $X$  и любого числа  $1 \leq i \leq 2020$  было ровно  $n$  городов на расстоянии  $i$  от него (расстоянием между городами называется наименьшее число дорог, которое нужно проехать). При каких  $n$  король может это сделать?
5. Пусть  $f(t) = t^2 + 10t$ . Последовательность  $a_n$  задана следующим образом:  $a_1 = 20$ ,  $a_{n+1} = f(a_n)$ . Докажите, что в этой последовательности нет точных 2021-х степеней.