

Графы

1. В графе на 18 вершинах степень каждой вершины не более 3. Какое наибольшее количество циклов длины 4 может быть в этом графе?
2. Барон Мюнхгаузен вернулся из отпуска. «Удивительная страна. Стоимости перелётов между всеми парами городов разные, но у всех циклических маршрутов, проходящим по всем городам, суммарная стоимость перелётов одинаковая». Известно, что городов не менее 2021 и что любые два из них соединены двусторонней авиалинией. Могли ли слова барона оказаться правдой?
3. Компания из нескольких людей называется связной, если её нельзя разбить на две непустые группы так, что люди из разных групп будут не знакомы. В некоторой связной компании каждый знает ровно четверых, и четверо знакомых каждого человека образуют связную компанию. Докажите, что людей этой компании можно поставить по кругу так, чтобы любые два соседа были знакомы.
4. В некоторой стране есть $n > 3$ аэропортов и n авиакомпаний, выполняющих двусторонние рейсы. При этом каждая компания выполняет хотя бы один рейс, и каждая пара городов соединена рейсом ровно одной из авиакомпаний. Докажите, что найдётся замкнутый маршрут, состоящий из трёх рейсов, в котором никакие два рейса не выполняются одной и той же авиакомпанией.
5. В стране $2020n + 1$ город, где $n \in \mathbb{N}$. Король решил построить дороги между некоторыми парами городов так, чтобы для любого города X и любого числа $1 \leq i \leq 2020$ было ровно n городов на расстоянии i от него (расстоянием между городами называется наименьшее число дорог, которое нужно проехать). При каких n король может это сделать?
6. В городе на каждую площадь выходит не менее трёх улиц. На улицах введено одностороннее движение так, что можно проехать с любой площади на любую другую. Докажите, что можно запретить движение между двумя площадями так, что проезд сохранится.