Постулат Бертрана

Пусть $\pi(x)$ — количество простых чисел, не превосходящих x. Пусть R_n — произведение всех простых чисел от $n+1$ до $2n$ (если таковых нет, произведение считаем равным единице).

1. Докажите, что степень вхождения простого числа p в $n!$ вычисляется по формуле:

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\left[\frac{n}{p^4}\right]+\ldots$$

2. **(а)** Докажите, что если $p > 2n$, то C_{2n}^n не делится на p.

(б) Докажите, что если $n < p < 2n$, то p входит в C_{2n}^n ровно в первой степени.

(в) Докажите, что если $\frac{2n}{3} < p \leqslant n$ и $p > 2$, то C_{2n}^n не делится на p.

(г) Докажите, что если $p > \sqrt{2n}$, то p входит в C_{2n}^n не более чем в первой степени.

(д) Докажите, что если C_{2n}^n делится на p^k, то $p^k \leqslant 2n$.

3. Докажите, что $C_{2n}^n \geqslant \frac{4^n}{2\sqrt{n}}$ при любом натуральном n.

4. Докажите, что произведение всех простых чисел от 1 до n, меньше 4^n.

5. Докажите, что $R_n > \frac{4^{n/3}}{2\sqrt{n}(2n)^{\pi(\sqrt{2n})}}$ при любом натуральном n.

6. Докажите, что $\pi(x) \leqslant \frac{x}{2}$ при $x \geqslant 8$.

7. **(а)** Докажите, что $2^x > 6x$ при вещественных $x \geqslant 5$.

(б) Докажите, что $2^{n/3} > (2n)^{\sqrt{n/2}}$ при натуральных $n \geqslant 450$.

8. Докажите, что $R_n > 1$ при натуральных $n \geqslant 450$.

9. **(а)** Докажите, что при натуральных $n > 5$ между n и $2n$ содержится хотя бы одно простое число.

(б) Докажите, что при натуральных $n > 5$ между n и $2n$ содержится хотя бы два простых числа.

(в) Докажите, что для любого натурального k между n и $2n$ содержится хотя бы k простых чисел, для достаточно больших n.