

Дистанционная олимпиада — 4

1. В одной из клеток квадрата 2021×2021 находится невидимый таракан. У Лёши есть тапок, которым он раз в минуту ударяет по квадрату 50×50 ; каждый раз в момент удара таракан перебегает на соседнюю по стороне клетку. Докажите, что Лёша сможет убить таракана.
2. В четырехугольнике $ABCD$ $\angle A = \angle C = 90^\circ$. На диагонали BD выбраны точки M, N так, что $AN \parallel BC$, $CM \parallel AB$. На сторонах AD и CD соответственно выбраны точки X и Y так, что $\angle XNB = \angle YMD = 90^\circ$. Докажите, что отрезок AC равен полупериметру треугольника BXY .
3. Докажите, что для любых положительных чисел a, b, c справедливо неравенство

$$(ab + bc + ca + 1)(a + b)(b + c)(c + a) \geq 2abc(a + b + c + 1)^2.$$