Геометрический разнобой

1. Пусть O и H — центр описанной окружности и ортоцентр соответственно треугольника ABC. Докажите, что одна из площадей OHA, OHB, OHC равна сумме двух других.

2. Пусть ABC равнобедренный треугольник, $AC = BC$. Вписанная окружность касается AB в точке D и BC — в точке E. Прямая, отличная от AE и проходящая через A, пересекает вписанную окружность в точках F и G. Прямая AB пересекает EF и EG в точках K и L соответственно. Докажите, что $DK = DL$.

3. Пусть P и Q изогонально сопряженные точки в треугольнике ABC; $P_1P_2P_3$ и $Q_1Q_2Q_3$ — их педальные треугольники. Также пусть $X_1 = P_2Q_3 \cap P_3Q_2$, $X_2 = P_1Q_3 \cap P_3Q_1$, $X_3 = P_1Q_2 \cap P_2Q_1$. Докажите, что точки P, Q, X_1, X_2, X_3 лежат на одной прямой.

4. В треугольнике ABC точки D, M лежат на сторонах BC и AB соответственно, точка P лежит на отрезке AD. Прямая DM пересекает BP, AC (вне отрезка), PC (вне отрезка) в точках E, F и N соответственно. Покажите, что если $DE = DF$, то $DM = DN$.

5. Пусть ABC остроугольный треугольник, H и O — его ортоцентр и центр описанной окружности соответственно, M и N — середины отрезков AH и BC соответственно. Окружность γ с диаметром AH пересекает описанную окружность ABC в точке $G \neq A$, а прямую AN в точке $Q \neq A$. Касательная к γ в G пересекает OM в точке P. Покажите, что одна из точек пересечения описанных окружностей $\triangle GNQ$ и $\triangle MBC$ лежит на прямой PN.

6. Пусть ABC остроугольный треугольник с $\angle C = 90°$, H — основание высоты из C. Точка D выбрана внутри CBH так, что CH делит пополам AD. Прямые BD и CH пересекаются в точке P. Пусть ω — полуокружность с диаметром BD пересекающая отрезок CB. PQ — касательная к ω из точки P. Докажите, что прямые CQ и AD пересекаются на ω.