

Геометрический разнобой

1. Точка D — основание высоты из точки A в треугольнике ABC , E — основание перпендикуляра из точки D на AB , F — основание перпендикуляра из точки D на AC . Прямая AB пересекается с прямой, проходящей через D параллельно AC , в точке G , прямая AC пересекается с прямой, проходящей через точку D параллельно AB , в точке H . Докажите, что прямые BC , EF , GH пересекаются в одной точке.
2. Дан треугольник ABC и точка M . Прямая, проходящая через M , пересекает прямые AB , BC и CA в точках C_1 , A_1 и B_1 соответственно. Прямые AM , BM и CM пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках A_2 , B_2 и C_2 соответственно. Докажите, что прямые A_1A_2 , B_1B_2 и C_1C_2 пересекаются на описанной окружности треугольника ABC .
3. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность ω . Пусть H и O — ортоцентр и центр описанной окружности соответственно, M и N — середины сторон AB и AC соответственно. Лучи MH и NH пересекают ω в точках P и Q . Прямые MN и PQ пересекаются в R . Докажите, что $OA \perp RA$.
4. Пусть O и H — центр описанной окружности и ортоцентр соответственно треугольника ABC . Докажите, что одна из площадей OHA , OHB , OHC равна сумме двух других.
5. Пусть P и Q изогонально сопряженные точки в треугольнике ABC ; $P_1P_2P_3$ и $Q_1Q_2Q_3$ — их педальные треугольники. Также пусть $X_1 = P_2Q_3 \cap P_3Q_2$, $X_2 = P_1Q_3 \cap P_3Q_1$, $X_3 = P_1Q_2 \cap P_2Q_1$. Докажите, что точки P , Q , X_1 , X_2 , X_3 лежат на одной прямой.
6. Пусть ABC равнобедренный треугольник, $AC = BC$. Вписанная окружность касается AB в точке D и BC — в точке E . Прямая, отличная от AE и проходящая через A , пересекает вписанную окружность в точках F и G . Прямая AB пересекает EF и EG в точках K и L соответственно. Докажите, что $DK = DL$.