

Комбинаторный разнобой

1. Клетки таблицы $n \times n$ заполнены знаками «+» и «-». За одну операцию разрешается выбрать один ряд (столбец или строку) и заменить все знаки в этом ряду на противоположные. Известно, что с помощью таких операций можно изначальную таблицу превратить в таблицу из одних плюсов. Докажите, что это можно сделать, потратив не более n операций.
2. За круглым столом на одинаковом расстоянии друг от друга сидят 100 человек. Каждый заказал себе порцию мороженого, всего заказали 51 порцию орехового и 49 порций клубничного. Заказ принесли правильно, но расставили перед людьми в произвольном порядке. Докажите, что можно повернуть стол так, чтобы по крайней мере у 52 человек был тот вкус мороженого, который эти люди заказали.
3. Барон Мюнхгаузен вернулся из отпуска. «Удивительная страна. Стоимости перелётов между всеми парами городов разные, но у всех циклических маршрутов, проходящим по всем городам, суммарная стоимость перелётов одинаковая». Известно, что городов не менее 2021 и что любые два из них соединены двусторонней авиалинией. Могли ли слова барона оказаться правдой?
4. Даны натуральные числа n и k . Набор последовательностей из n нулей и единиц назовём *разреженным*, если любые две последовательности этого набора различаются хотя бы в k разрядах. Докажите, что к любому разреженному набору из трёх последовательностей можно добавить ещё одну, сохранив свойство разреженности.
5. В компании 100 человек. Оказалось, что любых 98 из них можно разбить на 49 пар знакомых. Какое наименьшее число пар знакомых может быть в этой компании?
6. Имеется три кучи камней. Сизиф таскает по одному камню из кучи в кучу. За каждое перетаскивание он получает от Зевса количество монет, равное разности числа камней в куче, в которую он кладет камень, и числа камней в куче, из которой он берет камень (сам перетаскиваемый камень при этом не учитывается). Если указанная разность отрицательна, то Сизиф возвращает Зевсу соответствующую сумму. (Если Сизиф не может расплатиться, то великодушный Зевс позволяет ему совершать перетаскивание в долг.) В некоторый момент оказалось, что все камни лежат в тех же кучах, в которых лежали первоначально. Каков наибольший суммарный заработок Сизифа на этот момент?
7. В 17 клеток квадрата 5×5 поставили по одной фишке. За один ход все фишки передвигаются в соседнюю по стороне клетку. Запрещается ставить две фишки в одну клетку и, если фишка передвигалась по горизонтали, то в следующий ход она должна передвинуться по вертикали, и наоборот. Может ли процесс продолжаться сколь угодно долго?