Обобщённая теорема Ван дер Вардена

1. Множество целых точек плоскости раскрашено в n цветов.

(а) Докажите, что при $n = 2$ найдутся три одноцветные точки являющиеся вершинами прямоугольного равнобедренного треугольника (с катетами параллельными осям).

(б) Докажите, что для любого k существуют два одинаково раскрашенных квадрата $k \times k$ таких, что один получается из другого горизонтальным параллельным переносом. Более того, при достаточно больших k, внутри этих квадратов можно найти квадраты $l \times l$ с тем же свойством (k зависит от l).

(в) Докажите, что найдутся три одноцветные точки, являющиеся вершинами прямоугольного равнобедренного треугольника (с катетами, параллельными осям).

Указание: докажите для $n = 3$, а дальше поймите, как улучшить алгоритм до любого n.

(г) Докажите, что найдутся четыре одноцветные точки, являющиеся вершинами квадрата (со сторонами, параллельными осям).

Обобщенная теорема Ван дер Вардена для решётки. Пусть L — целочисленная решётка в $\mathbb{R}^n$. $M \in L$ — фигура, состоящая из конечного числа точек. Тогда для каждой раскраски L в k цветов найдётся фигура, составленная из точек решётки, гомотетичная M и покрашенная в один цвет.

Под «гомотетией» подразумевается композиция гомотетии с целым положительным коэффициентом и параллельного переноса.

2. Докажите обобщённую теорему Ван дер Вардена для $n = 2$.

3. **Теорема Ван дер Вардена об арифметической прогрессии.** Пусть натуральный ряд раскрашен в несколько (конечное число) цветов. Тогда в нём можно найти сколь угодно длинную конечную одноцветную арифметическую прогрессию.

4. Пусть натуральный ряд раскрашен в несколько (конечное число) цветов. Тогда в нём можно найти сколь угодно длинную конечную одноцветную геометрическую прогрессию.

5. В клетках бесконечной клетчатой бумаги записаны действительные числа. Докажите, что найдётся квадрат, сумма чисел внутри которого отстоит от целого числа не более чем на 1/2021.

6. Пусть $A = (a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots)$ — бесконечная последовательность натуральных чисел с равномерно ограниченными разностями $a_{n+1} - a_n$ (то есть при всех n a_{n+1} больше a_n не более чем на заранее заданную величину, например, на 2).

(а) Докажите, что A содержит произвольно длинную арифметическую прогрессию.

Указание: раскрасьте натуральный ряд в несколько цветов так, чтобы из наличия арифметической прогрессии одного цвета следовало бы наличие арифметической прогрессии в последовательности A.

(б) Придумайте последовательность A с условием $a_{n+1} - a_n \leqslant 2$, для которой выполнено следующее свойство: если числа из A покрасить чёрным цветом, а все остальные — белым, то бесконечной одноцветной арифметической прогрессии ни чёрного, ни белого цветов не найдётся.