

Дистанционная олимпиада — 3

1. За одну операцию из натурального числа n можно получить одно из чисел $2n + 1$, $3n + 2$ и $5n + 4$. Числа m и n называются *похожими*, если за несколько операций (возможно, за разное количество) из чисел m и n можно получить одно и то же число. Найдите количество натуральных чисел, меньших 2009 и похожих на него.
2. В комнате находится несколько детей и куча из 2021 конфеты. Каждый из них по очереди подходит к куче, делит количество конфет в ней на количество детей в комнате (включая себя), округляет (если получилось нецелое число), забирает полученное число конфет и покидает комнату. При этом мальчики округляют вверх, а девочки — вниз. Докажите, что суммарное количество конфет у мальчиков, когда все выйдут из комнаты, не зависит от порядка детей в очереди.
3. Внутри четырёхугольника $ABCD$ взяли точку P . Прямые BC и AD пересекаются в точке X . Оказалось, что прямая XP является внешней биссектрисой углов APD и BPC . Пусть PY и PZ — биссектрисы треугольников APB и DPC . Докажите, что точки X , Y и Z лежат на одной прямой.