Теорема Паскаля

1. Дан вписанный шестиугольник $ABCDEF$. Прямые AB и DE пересекаются в точке X, прямые BC и EF пересекаются в точке Y, а прямые CD и FA — в точке Z. Рассмотрим точку R пересечения прямой XZ с описанной окружностью треугольника CFZ.
(а) Докажите, что точки R, B, C, X лежат на одной окружности.
(б) Докажите, что точки R, F, E, X лежат на одной окружности.
(в) Докажите, что точки X, Y, Z лежат на одной прямой, пользуясь двумя предыдущими пунктами.

Поприменяем втупую

2. На окружности в указанном порядке отмечены точки A, B, C, D, E, F. Отрезки AE и BF пересекаются в точке P, отрезки BD и CE — в точке Q, а отрезки AD и CF — в точке R. Докажите, что точки P, Q, R лежат на одной прямой через **(а)** теорему Паскаля; **(б)** изогональное сопряжение.

3. Дана неравнобокая трапеция $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Произвольная окружность, проходящая через точки A и B, пересекает боковые стороны трапеции в точках P и Q, а диагонали — в точках M и N. Докажите, что прямые PQ, MN и CD конкурентны. (без радосей, пожалуйста)

4. Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ касательные в точках A в D пересекают прямые BD и AC соответственно в точках P и Q. Докажите, что прямые PQ, AB и CD пересекаются в одной точке.

5. (Сдаётся целиком, как один пункт)
(а) Сформулируйте синусную теорему Чевы так, чтобы вам не сняли за эту формулировку баллы на всеросе. Сформулируйте синусную теорему Менелая. Тоже хорошо.
(б) Вокруг треугольника ABC описана окружность ω. Касательная в точке A к ω пересекает прямую BC в точке A'. Аналогично определены точки B' и C'. Докажите используя синусную теорему Менелая, что точки A', B' и C' лежат на одной прямой.
(в) Докажите утверждение предыдущего пункта через теорему Паскаля.

6. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Прямые AB и CD пересекаются в точке P, а диагонали AC и BD — в точке Q. Касательные к описанной окружности четырёхугольника в точках B и C пересекаются в точке R, а касательные к этой же окружности в точках A и D пересекаются в точке S. Докажите, что точки P, Q, R, S коллинеарны. (без поляр, пожалуйста)

7. Даны 5 точек на одной окружности. С помощью одной линейки постройте ещё одну точку этой окружности.

8. Докажите, что точки пересечения диагоналей описанного четырёхугольника и четырёхугольника, образованного точками касания вписанной в этот четырёхугольник окружности с его сторонами, совпадают.

9. Окружность касается сторон AB и BC треугольника ABC в точках P и Q соответственно, а также его описанной окружности. Докажите, что центр I вписанной в треугольник ABC окружности лежит на отрезке PQ.

10. На описанной окружности ω треугольника ABC выбрана произвольная точка M, а P — вообще произвольная. Прямые AP, BP и CP вторично пересекают ω в точках A', B', C'. Прямые MA', MB' и MC' пересекают соответственные стороны треугольника ABC в точках Q, R, S. Докажите, что точки P, Q, R, S лежат на одной прямой.

И наконец то, что можно назвать задачами

11. В треугольнике ABC высоты AA_1 и CC_1 пересекаются в точке H, а M — середина стороны AC. Точки P и Q — проекции B на MH и H на BM соответственно. Докажите, что точка пересечения прямых PA_1 и QB_1 лежит на прямой AC.

12. На описанной окружности треугольника ABC взяли точки P и Q, середины дуг ABC и BC соответственно. На прямой PQ взяли точку R так, что $BR \perp AB$.
(а) Докажите, что R лежит на линии центров описанной и вписанной окружностей треугольника ABC.
(б) Отметили ещё точку S, середину дуги BCA. Докажите, что точка пересечения прямых CP и BS тоже лежит на той же линии центров.

13. Хорда CD окружности с центром O перпендикулярна её диаметру AB, а хорда AE делит пополам радиус OC. Докажите, что хорда DE делит пополам хорду BC.

14. Биссектрисы углов A и C треугольника ABC пересекают описанную окружность этого треугольника в точках A_0 и C_0 соответственно. Прямая, проходящая через центр вписанной окружности треугольника ABC параллельно стороне AC, пересекается с прямой A_0C_0 в точке P. Докажите, что прямая PB касается описанной окружности треугольника ABC.

15. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его стороны AC в точке P и имеет центр I. Концентрическая с ней окружность пересекает все его стороны. Те её точки пересечения со сторонами AB и BC, что ближе к вершине B назовём K и L соответственно. А точки её пересечения со стороной AC назовём M и N, причём M ближе к A, чем N. Докажите, что прямые KN, LM и BP пересекаются в одной точке.