

Теорема Паскаля

Обсуждаем вместе

Теорема Паскаля. Точки пересечения противоположных сторон вписанного шестиугольника лежат на одной прямой.

Обратная теорема Паскаля. Если пять вершин шестиугольника лежат на одной окружности, и точки пересечения противоположных сторон лежат на одной прямой, то и шестая точка тоже лежит на этой окружности.

Как использовать теорему Паскаля? Вписанный шестиугольник, упомянутый в теореме, — замкнутая шестизвенная ломанная, чьи вершины лежат на окружности.

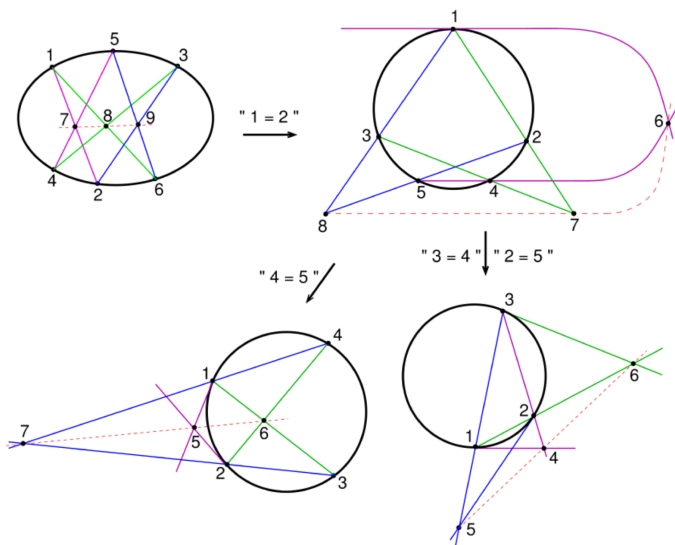
Пронумеруем вершины ломанной от 1 до 6. Пусть

- прямые 12 и 45 пересекаются в точке 7;
- прямые 23 и 56 пересекаются в точке 9;
- прямые 34 и 61 пересекаются в точке 8,

тогда точки 7, 8, 9 лежат на одной прямой.

При это можно «склеивать» точки. Например, если склеить точки 1 и 2, то прямая 12 превратится в касательную к окружности.

Примеры склеивания точек можно посмотреть на чертежах ниже.



Задачи для самостоятельного решения

1. Доказать, что во вписанном четырехугольнике точки пересечения противоположных сторон и точки пересечения касательных в противоположных вершинах лежат на одной прямой.
2. Даны треугольник ABC и некоторая точка T . Пусть P и Q — основания перпендикуляров, опущенных из точки T на прямые AB и AC соответственно, а R и S — основания перпендикуляров, опущенных из точки A на прямые TC и TB соответственно. Докажите, что точка пересечения прямых PR и QS лежит на прямой BC .
3. Внутри треугольника ABC выбрана точка M . Прямые AM, BM, CM пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках A', B', C' соответственно. Докажите, что главные диагонали шестиугольника, образованного пересечением треугольников ABC и $A'B'C'$, пересекаются в точке M .
4. Окружность, проходящая через вершины A и D основания трапеции $ABCD$, пересекает боковые стороны AB, CD в точках P, Q , а диагонали — в точках E, F . Докажите, что прямые BC, PQ, EF пересекаются в одной точке.
5. Дан прямоугольник $ABCD$ и точка P . Прямые, проходящие через A и B и перпендикулярные, соответственно, PC и PD , пересекаются в точке Q . Докажите, что $PQ \perp AB$.
6. Точка M лежит на описанной окружности треугольника ABC ; R — произвольная точка. Прямые AR, BR, CR пересекают описанную окружность в точках A_1, B_1, C_1 . Докажите, что точки пересечения прямых MA_1 и BC, MB_1 и CA, MC_1 и AB лежат на одной прямой, проходящей через точку R .
7. Пусть A' — точка, диаметрально противоположная точке A в описанной окружности треугольника ABC с центром O . Касательная к описанной окружности в точке A' пересекает прямую BC в точке X . Прямая OX пересекает стороны AB и AC в точках M и N . Докажите, что $OM = ON$.
8. Равносторонний треугольник ABC вписан в окружность Ω и описан вокруг окружности ω . На сторонах AC и AB выбраны точки P и Q соответственно так, что отрезок PQ проходит через центр треугольника ABC . Окружности Γ_b и Γ_c построены на отрезках BP и CQ как на диаметрах. Докажите, что окружности Γ_b и Γ_c пересекаются в двух точках, одна из которых лежит на Ω , а другая — на ω .