

Раскраски графов

Часть имени Брукса

- Докажите, что связный граф, в котором степени всех вершин не превосходят d , можно покрасить в $d > 2$ цветов правильным образом, если
 - в графе есть вершина, степень которой меньше d .
 - в графе есть вершина, удаление которой нарушает связность графа.
 - в графе есть пара соседних вершин, удаление которых нарушает связность графа.
 - в графе есть пара вершин, удаление которых нарушает связность графа.
 - в графе есть пара несмежных вершин, смежных с какой-то третьей, при этом удаление вершин не нарушает связности графа.**(е) (Теорема Брукса)** В связном графе степени всех вершин не превосходят $d > 1$, при этом граф не является полным графом и не является нечётным циклом. Докажите, что его вершины можно раскрасить в d цветов, чтобы одноцветные вершины не были соединены ребром.
- Докажите, что вершины графа, в котором степень каждой вершины не более k , можно раскрасить в $k^2 - k + 1$ цвет так, чтобы ни у какой вершины не было двух одноцветных соседей.
- Вершины графа нельзя раскрасить правильным образом в d цветов. Докажите, что можно выбрать несколько вершин в этом графе, чтобы каждая из выбранных была соединена хотя бы с d из выбранных.
- Докажите, что из графа можно удалить не более, чем $1/n$ часть его рёбер так, чтобы полученный граф имел правильную раскраску вершин в n цветов.

Часть без имени

- Рёбра полного графа на 101 вершине раскрашены в 25 цветов так, что нет одноцветных треугольников. Какое наибольшее количество треугольников с рёбрами трёх разных цветов может быть?
- В школе на 200 учеников организуют факультативные лекции. На каждую предложенную лекцию записалось хотя бы 10 учеников, и для любых двух учеников имеется не более одной лекции, на которую записались бы оба. Докажите, что можно провести все эти лекции в течение 211 дней так, что никому не придётся посетить две лекции за один день.
- Рёбра графа раскрашены в $d > 1$ цветов так, что в любом пути из трёх различных рёбер (в том числе и замкнутом) первое и последнее ребро покрашены в разные цвета. Докажите, что вершины этого графа можно правильным образом покрасить в d цветов.

8. Дан граф, степень каждой вершины которого равна 3. Известно, что число правильных раскрасок рёбер в 3 цвета не делится на 4. Докажите, что в графе существует гамильтонов цикл.