Многочлены и непрерывность

Главная мысль №1: если у многочлена на концах интервала значения разных знаков, то на этом интервале у многочлена есть корень.

Главная мысль №2: если у многочлена нет действительных корней, то на всей вещественной оси он принимает значения одного и того же знака.

1. Многочлен $P(x)$ таков, что уравнение $P(x) = x$ не имеет корней. Докажите, что уравнение $P(P(x)) = x$ также не имеет корней.

2. Существуют ли такие три многочлена f_1, f_2, f_3 что у каждого из них и у их суммы $f_1 + f_2 + f_3$ имеется хотя бы по одному корню, а у трех сумм $f_1 + f_2, f_2 + f_3, f_3 + f_1$ корней нет?

3. Пусть $f(x) = x^3 - x, g(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Докажите, что при любых действительных a и b, сумма которых не равна 0, многочлен $af(x) + bg(x)$ имеет три различных действительных корня.

4. Для любых попарно различных целых чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ докажите, что многочлен $(x - a_1)^2(x - a_2)^2 \dots (x - a_n)^2 + 1$ неприводим над $\mathbb{Z}$.

5. Пусть многочлен $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ имеет хотя бы один действительный корень и $a_0 \neq 0$. Докажите, что, последовательно вычеркивая в некотором порядке одночлены в записи $P(x)$, можно получить из него число a_0 так, чтобы каждый промежуточный многочлен также имел хотя бы один действительный корень.

6. Докажите, что множество решений неравенства $\Sigma_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} \geqslant \frac{5}{4}$ есть объединение непересекающихся промежутков, суммарная длина которых равна 1988.

7. Докажите, что для любого $0 \leqslant a \leqslant 1/50$ и для любого многочлена $P(x)$ степени 99, такого, что $P(0) = P(1) = 0$, найдутся такие x_1 и x_2 из отрезка $[0, 1]$, что $P(x_1) = P(x_2)$ и $x_2 - x_1 = a$.