

Дистанционная олимпиада — 2

1. В школе решили провести турнир по настольному теннису между математическими и гуманитарными классами. Команда гуманитарных классов состоит из n человек, команда математических – из m , причём $n \neq m$. Так как стол для игры всего один, было решено играть следующим образом. Сначала какие-то два ученика из разных команд начинают играть между собой, а все остальные участники выстраиваются в одну общую очередь. После каждой игры человек, стоящий в очереди первым, заменяет за столом члена своей команды, который становится в конец очереди. Докажите, что рано или поздно каждый математик сыграет с каждым гуманитарием.
2. Радиус описанной окружности треугольника ABC равен радиусу вневписанной окружности того же треугольника напротив вершины A . Вневписанная окружность касается прямых BC, AC, AB в точках M, N, L . Докажите, что O (центр описанной окружности) является ортоцентром треугольника MNL .
3. Найдите все такие функции $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ (то есть определённые на множестве натуральных чисел и принимающие натуральные значения), что для любых натуральных m и n число $f(m) + n - m$ делится на $f(n)$.