# Многочлены и непрерывность

**Главная мысль №1:** если у многочлена на концах интервала значения разных знаков, то на этом интервале у многочлена есть корень.

**Главная мысль №2:** если у многочлена нет действительных корней, то на всей вещественной оси он принимает значения одного и того же знака.

1. Многочлен $P(x)$ таков, что уравнение $P(x) = x$ не имеет корней. Докажите, что уравнение $P(P(x)) = x$ также не имеет корней.
   **Решение:** Предположим противное. Тогда многочлен $P(x) - x$ всегда либо больше, либо меньше 0. Не умоляя общности, пусть $P(x) > x$ для всех $x$. Тогда для любого $x$ имеем: $P(P(x)) > P(x) > x$, то есть у $P(P(x)) - x$ нет корней, что и требовалось.

2. Существуют ли такие три многочлена $f_1, f_2, f_3$ что у каждого из них и у их суммы $f_1 + f_2 + f_3$ имеется хотя бы по одному корню, а у трех сумм $f_1 + f_2, f_2 + f_3, f_3 + f_1$ корней нет?
   **Решение:** Предположим, что существуют. Тогда многочлены $f_1 + f_2, f_2 + f_3, f_3 + f_1$ всегда одного знака.

   Пусть они все одного, не умоляя общности, положительного знака. Тогда их сумма $2(f_1 + f_2 + f_3) > 0$. Но такого быть не может, так как этот многочлен имеет корень.

   Пусть теперь два из них одного знака, а один другого – не умоляя общности $f_1 + f_2, f_2 + f_3 > 0$ и $0 > f_1 + f_3$. Тогда сложим все эти три неравенства, получим, что $2f_2 + f_1 + f_3 > f_1 + f_3$, то есть $2f_2 > 0$, что тоже невозможно, так как у этого многочлена есть корень. Противоречие.

3. Пусть $f(x) = x^3 - x, g(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Докажите, что при любых действительных $a$ и $b$, сумма которых не равна 0, многочлен $af(x) + bg(x)$ имеет три различных действительных корня.
   **Решение:** Заметим, что $a + b$ это старший коэффициент многочлена $h(x) = af(x) + bg(x)$. Значит $h(x)$ ровно третий степени.

   Если $b = 0$, то $h(x) = af(x)$, тогда он имеет корни $0, 1, -1$.

   Пусть теперь $b > 0$ (случай $b < 0$ аналогичен). Тогда $h(-1) = bg(-1) = -3b < 0$, $h(0) = bg(0) = b > 0$ и $h(1) = bg(1) = -b < 0$. Значит на интервалах $(-1, 0)$ и $(0, 1)$ наш многочлен $h(x)$ имеет корни. Также (в зависимсоти от знака старшего коэффициента) $h(x)$ либо на плюс бесконечности, либо на минус бесконечности положителен. Это даст нам третий корень.

4. Для любых попарно различных целых чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ докажите, что многочлен $(x - a_1)^2(x - a_2)^2 \dots (x - a_n)^2 + 1$ неприводим над $\mathbb{Z}$.
   **Решение:** Предположим $(x - a_1)^2(x - a_2)^2 \dots (x - a_n)^2 + 1 = Q(x)R(x)$. Тогда $1 =$

$Q(a_i)P(a_i)$ для $i$ от 1 до $n$. Так как $Q, R$ имеет целые коэффициенты, то $Q(a_i)$ и $R(a_i)$ целые, значит либо $Q(a_i), R(a_i) = 1$, либо $Q(a_i), R(a_i) = -1$.

Заметим, что многочлен $(x-a_1)^2(x-a_2)^2 \dots (x-a_n)^2 + 1$ всегда положителен, значит $Q(x)$ и $R(x)$ всегда одного знака. Значит либо для всех $i$ $Q(a_i), R(a_i) = 1$, либо $Q(a_i), R(a_i) = -1$. Не умоляя общности рассмотрим только первый случай.

Так как суммарная степень $Q(x)$ и $R(x)$ равна $2n$, то либо один из них степени меньше $n$, либо они оба степени ровно $n$. Первый случай невозможен, так как тогда многочлен степени меньше $n$ будет в $n$ точках совпадать с констнатным многочленом 1. Значит они оба степени $n$.

Тогда $Q(x) - 1 = c(x-a_1)(x-a_2) \dots (x-a_n)$, так $a_i$ его корни, а степень его равна $n$. Также мы знаем, что произведение старших коэффициентов $Q(x)$ и $R(x)$ ровно 1, а также они оба всегда больше нуля. Значит $c = 1$ и $Q(x) = (x-a_1)(x-a_2) \dots (x-a_n) + 1$. Аналогично тому же равно и $R(x)$.

Но очевидно, что $((x-a_1)(x-a_2) \dots (x-a_n)+1)^2 \neq (x-a_1)^2(x-a_2)^2 \dots (x-a_n)^2 + 1$. Противоречие.

**5.** Пусть многочлен $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ имеет хотя бы один действительный корень и $a_0 \neq 0$. Докажите, что, последовательно вычеркивая в некотором порядке одночлены в записи $P(x)$, можно получить из него число $a_0$ так, чтобы каждый промежуточный многочлен также имел хотя бы один действительный корень.
**Решение:** Заметим, что многочлен нечётной степени имеет корень. Так что если $n$ нечётно, то мы можем стереть любой другой одночлен и мы получим многочлен нечётной степени, то есть имеющий корень. Так что будем считать что $n$ чётно.

Не умоляя общности предположим, что $P(0) = a_0 > 0$. Пусть $a_n$ отрицательно. Тогда мы можем стереть любой другой одночлен, чтобы старший коэффициент был отрицательным. Тогда на бесконечности наш многочлен будет отрицательным, а в точке 0 положительным, значит у него есть корень.

Пусть теперь $a_n > 0$. Сотрём $a_n x^n$. Мы знаем, что у $P(x)$ был корень $a$. Тогда у нового многочлена значение в точке $a$ стало меньше, мы ведь вычли из него положительное число $a_n a^n$. Тогда полученный многочлен в одной точке (в $a$) отрицательный, а в одной точке (в 0) положительный. Значит у него есть корень.

**6.** Докажите, что множество решений неравенства $\Sigma_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} \geqslant \frac{5}{4}$ есть объединение непересекающихся промежутков, суммарная длина которых равна 1988.
**Решение:** Давайте запишем исходное неравенство в более удобном виде:

$$\frac{(\frac{4}{5}\Sigma_{k=1}^{70} k(x-1) \dots (x-(k+1)) \dots (x-70)) - (x-1)(x-2) \dots (x-70)}{\frac{4}{5}(x-1)(x-2) \dots (x-70)} \geqslant 0$$

(Мы просто перенесли всё в левую часть и привели к общему знаменателю, убедитесь сами!)

Обозначим многочлен в числители $P(x)$, в знаменатели $Q(x)$. Заметим, что наше неравенство выполняется тогда, когда $P(x)$ и $Q(x)$ одного знака. Так что давайте выяснять, когда же они одного знака.

С $Q(x)$ всё понятно, мы знаем все его корни, это $1, 2, \dots 70$ и его старший коэффициент положителен, получается, что на промежутке $(70, \infty)$ он положителен, на $(69, 70)$ он отрицателен, и так далее, на $(1, 2)$ он отрицателен, на $(-\infty, 1)$ он положителен.

Теперь будем разбираться с $P(x)$. Во-первых мы знаем, что он степени 70 и его старший коэффициент равен $-1$. Во-вторых давайте посчитаем его значениях в точках $k$ от 1 до 70. Легко видеть, что

$$P(k) = \frac{4}{5}k(k-1)\dots(k-(k-1))(k-(k+1))\dots(k-70).$$

Легко видеть, что при нечётных $k$ оно отрицательно, а при чётных положительно.

Что же это нам даёт? Это значит, что на интервалах $(1, 2)$, $(2, 3)$, ..., $(69, 70)$ у $P(x)$ есть корень. Также на плюс бесконечности $P(x)$ отрицателен, значит на $(70, \infty)$ $P(x)$ также имеет корень. Мы нашли у него 70 корней, следовательно это всего его корни. Обозначим их по порядку $x_1, x_2, \dots, x_{70}$. Тогда $P(x)$ на интервале $(x_{70}, \infty)$ отрицателен, на $(x_{69}, x_{70})$ положителен, и так далее, на $(x_1, x_2)$ положителен, на $(-\infty, x_1$ отрицателен.

Теперь легко видеть, что одинаковые знаки у $Q(x)$ и $P(x)$ на интервалах $(1, x_1)$, $(2, x_2)$, ..., $(70, x_{70})$. Значит суммарная их длинна равна $x_1 + x_2 + \dots + x_n - (1 + 2 + \dots + 70)$. А нам как раз надо найти чему она равна. Но по теореме Виета $x_1 + \dots + x_n$ равно коэффициенту при $x^{69}$ в многочлене $P(x)$, то есть равно $\frac{4}{5}(1+2+\dots+70)+1+2+\dots+70$. Значит суммарная длинна отрезков равна $\frac{4}{5} \cdot \frac{70 \cdot 71}{2} = 1988$.

**7.** Докажите, что для любого $0 \leqslant a \leqslant 1/50$ и для любого многочлена $P(x)$ степени 99, такого, что $P(0) = P(1) = 0$, найдутся такие $x_1$ и $x_2$ из отрезка $[0, 1]$, что $P(x_1) = P(x_2)$ и $x_2 - x_1 = a$.
**Решение:** По сути в задачи нас просят доказать, что многочлен $P(x+a)-P(x)$ имеет корень на отрезке $[0, 1-a]$. Предположим, что корней у него нет, тогда он всегда одного, не умоляя общности, положительного знака, то есть для $x$ из отрезка $[0, 1-a]$ имеем $P(x) < P(x + a)$.

Разберём сначала случай $a = 1/50$. Тогда $0 = P(0) < P(a) < P(2a) < \dots < P(50a) = P(1) = 0$, противоречие.

Пусть теперь $a < 1/50$. Тогда пусть $n$ наибольшее такое натуральное число, что $na < 1$. Тогда мы имеем, что $0 = P(0) < P(a) < \dots P(na)$. Также мы имеем, что $0 = P(1) > P(1-a) > \dots > P(1-na)$.

Заметим, что $na \neq 1$, так как иначе получается противоречие как при $a = 1/50$. Тогда $1-a$ находится на интервале $((n-1)a, na)$, $1-2a$ на интервале $((n-2)a, (n-1)a)$, ну и вообще $1-ak$ лежит на интервале $((n-k)a, (n-k+1)a)$. Так как $P(1-ak) < 0$, а $P((n-k)a)$ и $P((n-k+1)a) > 0$, то на интервале $((n-k)a, (n-k+1)a)$ у $P(x)$ есть два корня (кроме $k = n$).

Так как $a < 1/50$, то $n$ хотя бы 50, значит у нас есть 49 интервалов, где лежит по 2 корня, а также есть ещё корни в 0 и 1, значит всего корней уже $49 \cdot 2 + 2 = 100$, а у $P(x)$ степень 99, противоречие.