Комбинаторные рекурренты и разложение по базису

1. Любой многочлен степени n единственным образом представляется в виде линейной комбинации многочленов $1, x, x(x-1), x(x-1)(x-2), \dots, x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)$.

2. Многочлен называется целозначным, если он принимает целые значения при всех целых значениях аргумента. Многочлен степени n является целозначным тогда и только тогда, когда он представляется в виде линейной комбинации многочленов
$$1, x, \frac{x(x-1)}{2!}, \frac{x(x-1)(x-2)}{3!}, \dots, \frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)}{n!}$$
с целыми коэффициентами.

Числа Стирлинга

1. Сколькими способами можно разбить 4-элементное множество на два подмножества?

2. Сколькими способами можно разбить 7-элементное множество на 4 подмножества?

   Число Стирлинга S_n^k равно количеству способов, которыми можно разбить n-элементное множество на k подмножеств?

3. Найдите S_n^1, S_n^2, S_n^n.

4. Найдите S_5^3.

5. Числа Стирлинга удобно строить в виде треугольника, как мы делаем это при нахождении биномиальных коэффициентов. Придумайте рекуррентное соотношение, позволяющее строить треугольник Стирлинга и постройте первые семь его строк.

6. Докажите равенство
$$x^n = \sum_{k=1}^{n} S_n^k x(x-1)\dots(x-k+1).$$

7. **(а)** Разложите многочлен с $x^p - x$ над полем Z_p на неприводимые множители.
   (б) Докажите, что при всех простых p и всех таких k, что $1 < k < p$ числа Стирлинга S_p^k делятся на p.

Числа Белла

8. Сколькими способами можно разбить 4-элементное множество на непересекающиеся подмножества?

   Число Белла B_n равно количеству способов, которыми можно разбить n-элементное множество на непересекающиеся подмножества.

9. Докажите рекуррентное соотношение:

$$B_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} C_n^i B_i.$$

10. Найдите 7.

11.* Докажите сравнение Тушара: $B_{n+p} \equiv B_{n+1} + B_n \pmod{p}$ при всех простых p и всех натуральных n.

Это не просто задачка, а достаточно серьёзный математический факт. Но, может быть, кому-то удастся придумать несложное решение.